Diskrétní a spojitá optimalizace

poznámky z přednášky

Tomáš Sláma
10. 1. 2022

Toto PDF bylo automaticky vygenerováno z webové stránky https://slama.dev/diskretni-a-spojita-optimalizace, která je preferovaný způsob jak dokument číst. Za případné chyby způsobené převodem se omlouvám.

Obsah

{:.center} **Poznámky jsou aktuálně rozpracované, dokončené budou až o zkouškovém.**

Úvodní informace

Tato stránka obsahuje moje poznámky z přednášky Martina Loebla a Milana Hladíka z akademického roku 2021/2022. Pokud by byla někde chyba/nejasnost, nebo byste rádi někam přidali obrázek/text, tak stránku můžete upravit pull requestem (případně mi dejte vědět na mail.

TODO: dělení na diskrétní a spojitou část

Základní definice

Definice (matroid) je dvojice $(X, \mathcal{S})$, kde X je konečná množina, $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ splňující

1. $\emptyset \notin \mathcal{S}$
2. **dědičnost**: $(\forall A \in \mathcal{S}) A' \subseteq A \implies A' \in \mathcal{S}$
3. **výměnný axiom**: $(\forall U, V \in \mathcal{S})|U| > |V| \implies (\exists u \in U \setminus V) V \cup \{u\} \in \mathcal{S}$
   - $(3') : A \subseteq X \implies$ všechny maximální ($\subseteq$) podmnožiny A v $\mathcal{S}$ mají stejnou velikost

Prvkům $\mathcal{S}$ říkáme **nezávislé množiny**.

Lemma (stejná definice) Axiomy $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 3')$ definují stejný objekt.

Důkaz: $(3) \implies (3')$ sporem:

- nechť platí (3) ale existuje $A \subseteq X$ t. ž. pro nějaké $U, V \subseteq \mathcal{S}$ platí $U, V \subseteq A$ a zároveň U, V maximální je $|U| > |V|$.
- díky (3) $(\exists u \in U \setminus V)$ t. ž. $V \cup \{u\} \in \mathcal{S}$ a navíc $V \cup \{u\} \subseteq$, což je spor s maximalitou V.

Důkaz: $(3') \implies (3)$ sporem:

- nechť $U, V \in \mathcal{S}$ a $|U| > |V|$ a V je maximální
- definujme $A = U \cup V \subseteq X$; pak V je maximální ale $|U| > |V|$, což je spor

Příklad:

1. **vektorový matroid**:
   - nechť M je matice nad tělesem $\mathbb{F}$ s řádky C
   - $\mathcal{V}_M = (C, \mathcal{S})$, kde
     - $A \in \mathcal{S} \iff A \in C$ a A je lineárně nezávislé v $\mathbb{F}$
     - to, že je to matroid vyplívá ze Steinitzovy věty
2. **grafový matroid**:
   - mějme graf $G = (V, E)$
   - $\mathcal{M}_G = (E, \mathcal{S})$, kde
     - $A \in \mathcal{S} \iff A \subseteq E$ a A je acyklická
     - $(1) : \emptyset \in \mathcal{S}$
     - (2) : podmnožina acyklické je rovněž acyklická
     - (3) : počítání přes to, kolik hran je v komponentách souvislosti

(👀): matroidy jsou *přesně* **dědičné systémy**, kde lze definovat **řádová funkce**

Definice (řádová funkc) mějme systém podmnožin $(\mathcal{Z}, \mathcal{M}), \mathcal{M} \subseteq 2^{\mathcal{Z}}$ a $A \subseteq \mathcal{Z}$. Pak řádovou funkci $r : 2^{\mathcal{Z}} \mapsto \mathbb{N}$ definujeme jako **velikost maximální podmnožiny patřící do** $\mathcal{M}$:

$$r(A) = \max \left\{ |X| \mid X \in 2^A \wedge X \in \mathcal{M} \right\}$$

Věta (charakteristika řádové funkce) funkce $r : 2^X \mapsto N$ je řádová funkce nějakého matroidu nad $X \iff$ platí:

1. $r(\emptyset) = 0$
2. $r(Y) \leq r(Y \cup \{y\}) \leq r(Y) + 1$

3. $r(Y \cup \{y\}) = r(Y \cup \{z\}) = r(Y) \implies r(Y) = r(Y \cup \{y, z\})$

Důkaz: $\implies$:

1. max. nezávislá podmnožina $\emptyset$ je $\emptyset$ a $|\emptyset| = \emptyset$
2. z definice řádové funkce a dědičnosti matroidu
3. TODO

Grafová odbočka

Algoritmus (hladový) je-li dán souvislý graf $G = (V, E)$ a váhová funkce $w : E \mapsto \mathbb{Q}^+$, pak **MST** (minimum spanning tree) lze najít hladovým algoritmem (bereme vždy nejlehčí kterou můžeme přidat) v polynomiálním čase.

Definice (sudá podmnožina hran) podmnožina hran $E' \subseteq E$ je sudá, právě když $H = (V, E')$ má pouze sudé stupně.

Definice (matice incidence) grafu $G = (V, E)$ je matice $I_G \in \mathbb{F}_2^{|V| \times |E|}$ t.ž.

$$(I_G)_{v,e} = \begin{cases} 1 & v \in e \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Definice (jádro matice incidence) pro matici incidence I_G definujeme jádro jako

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{F}_2} I_G = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^{|E|} \mid I_G \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

Definice (charakteristický vektor) mějme nosnou množinu X a podmnožinu $A \subseteq X$. Charakteristický vektor A je $\mathcal{X}_A \in \{0, 1\}^{|X|}$ t.ž.

$$(\mathcal{X}_A)_k = \begin{cases} 1 & k \in A \\ 0 & k \notin A \end{cases}$$

(👀): řádek matice incidence I_G indexovaný vrcholem w je roven $\mathcal{X}_{\underbrace{|N(w)|}_{\text{okolí}}}$

(👀) (prostor cyklů) jádro matice můžeme ekvivalentně vyjádřit jako

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{F}_2} I_G = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^{|E|} \mid x = \mathcal{X}_{E'} \text{ pro } E' \text{ sudou} \right\}$$

Tuto množinu rovněž nazýváme **prostor cyklů.**

TODO: hodně přednášek

Perfektní párování

Definice (párování) $G = (V, E)$ graf; $M \subseteq E$ párovaní, jestliže $e, e' \in M \implies e = e'$ nebo $e \cap e' = \emptyset$.

Definice (maximální párování) pokud $|M|$ je maximální (co do velikosti).

(👀): neplatí, že maximální do velikosti je maximální do inkluze (můžeme si hrany vybrat špatně)

Definice (perfektní párování) pokud $|M| = |V|/2$

Definice (pokrytí) vrchol je M-pokrytý, pokud je v nějaké hraně z párování, jinak je M-nepokrytý.

Definice (defekt) $\mathrm{def}(M)$ je počet M-nepokrytých vrcholů

Definice (alternující cesta) podgraf, který je cesta

- je **zlepšující**, pokud má krajní vrcholy M-nepokryté

Věta: graf $G = (V, E)$, M párování. Pak M je maximální $\iff$ G nemá zlepšující cestu.

Důkaz:

- $\Leftarrow$ pokud má zlepšující cestu, tak párování můžeme zlepšit a není tedy maximální
- $\Rightarrow$ pokud G není maximální tak existuje párování M' t. ž. $M' > |M|$
  - uvažme graf $M \Delta M'$ – stupně mají vrcholy nejvýše dva, komponenty jsou tedy buď alternující cykly nebo cesty
  - díky tomu, že nám jedna hrana přebývá, tak alespoň jedna komponenta je cesta

(👀): $G = (V, E), A \subseteq V$. Pak v libovolném párování musí být liché komponenty $G \setminus A$ pokryté pouze z A a tedy

$$\mathrm{def}(M) \geq \mathrm{lc}(G \setminus A) - |A|$$

Kde lc značí počet lichých komponent grafu.

(👀): $g = (V, E)$. Pak max. velikost párování

$$\leq \min_{A \subseteq V} \frac{1}{2} \left(|V| - \mathrm{lc}(G \setminus A) + |A|\right)$$

Věta (Tutte-Berge) Pro výše uvedené pozorování max = min

Důkaz: stačí najít párování M t.ž. platí rovnost.

Najdeme algoritmem (Edmonds), který najde maximální párování

- postupně zvětšujeme párovaní M:

1. M perfektní $\implies$ je maximální a věta platí ($A = \emptyset$)
2. M má M-nepokrytý vrchol r: budujeme alternující strom T tím, že střídavě přidáváme hrany:
   - B-vrcholy: vrcholy v sudé vzdálenosti od r
   - A-vrcholy: vrcholy v liché vzdálenosti od r
   - zastavíme se, když:
     - existuje $w \notin T, \{v, w\} \in E$ a w je nepokrytý – pak jsme našli alternující cestu
     - neexistuje w
       1. všechny zbývající hrany z B-vrcholů vedou do A-vrcholů – poté když uvážíme $G \setminus A$, tak liché komponenty vedou pouze do A vrcholů ale B je o jedna více (máme r), tedy $|B| = |A| + 1$ a G nemá perfektní párování a **našli jsme defektní vrchol**
       2. pokud je graf bipartitní, tak nemáme žádné $B - B$ hrany

TODO: obrázek?

Pro **bipartitní grafy** můžeme algoritmus výše opakovat (opakovaně stavíme stromy z vrcholů, které nejsou v párování), najít všechny defektní vrcholy a věta výše platí (máme množinu defektních vrcholů a párování splňující rovnost).

Pro **nebipartitní grafy** může existovat hrana mezi $B - B$ vrcholy (lichá kružnice).

(👀): C lichá kružnice v G, G' vznikne kontrakcí C do jednoho (pseudo)vrcholu, M' je párování v G'. Potom existuje párování M v G, že počet M'-nepokrytých vrcholů je stejný jako počet M-nepokrytých.

TODO: obrázek

Podgrafy G reprezentované pseudovycholy mají lichý počet vrcholů (chceme opět dostat M a A, abychom větu dokázali). To platí, protože pseudovrcholy vzinkly kontrakcí liché kružnice na vrchol a tedy přišly o sudý počet vrcholů.

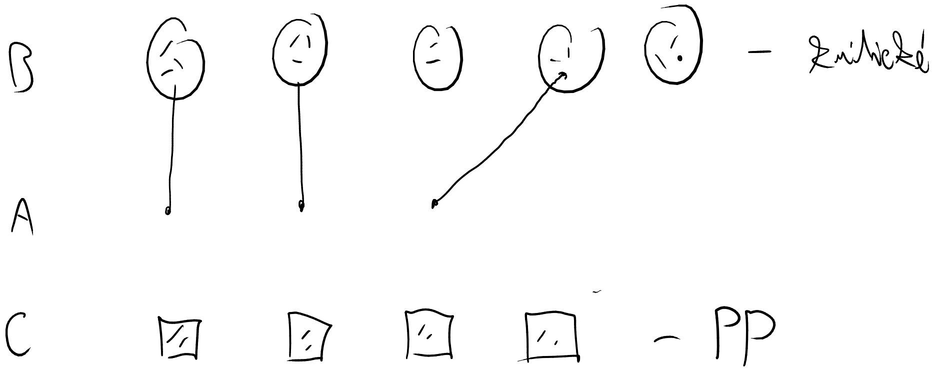
Postup pro $B - B$ hrany je tedy ten, že zkontrahujeme C, rekurzivně vyřešíme párování a odkontrahujeme.

Důsledek (Tutte [47]) G má perfektní párování $\iff$ $\forall A \subset V : \mathrm{lc}(G \setminus A) \leq |A|$

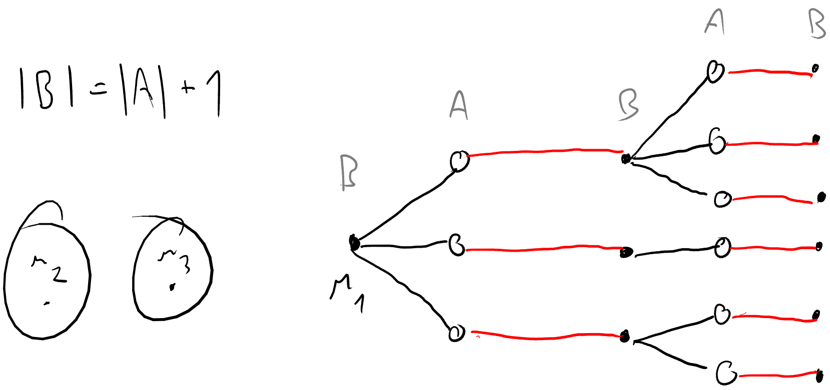
Věta (Edmonds-Gallai dekompozice) G graf, $G = (V, E)$, $B \subseteq V$ vrcholů nepokrytých nějakým maximálním párovaním. Nechť $A \subseteq V \setminus B$ sousedé vrcholů z B, $C = V \setminus (B \cup A)$. Pak

1. každá komponenta $G \setminus (A \cup C)$ je kritická ($\forall v \in K : K \setminus \{v\}$ má PP)
   - G kritický $\iff$ G lze zkonstruovat z liché kružnice lepením lichých uší

2. každé maximální párování M splňuje:
   - $e \in M, e \cap A \neq \emptyset \implies |e \cap A| = 1$ a e vede do B
     - tohle nezamezuje, že by dvě hrany z A nevedly do jedné z B
   - do každé komponenty B vede ≤ 1 hrana M



Důkaz: Uvažme poslední alternující les v Edmondsově algoritmu.



Každá hrana s koncem v A vede do B (s tím, že vrcholy v B jsou (pseudo)vrcholy vzniklé operací kontrakce. Defekt def(M) je počet komponent v tomto lese.

Nepokryté vrcholy žádným maximálním párováním:

- ne v A, jelikož všechny musí být pokryté každým maximálním párováním
- ne mimo $A \cup B$, protože tam je PP

Takové vrcholy tedy mohou být pouze v B, čímž jsme dokázali (1).

Část (2) rovněž plyne z Edmondsova algoritmu.

?

Nechť $G = (V, E)$ rovinný, $w : E \mapsto \mathbb{Q}$

1. **maximální PP** – najdi M PP t.ž. $w(E)$ je maximální
   - polynomiální (pro všechny grafy)
2. **maximální hranový řez** – najdi E' hranový řez t.ž. $w(E')$ je maximální
   - obecně je NP-těžný, pro grafy na 2D plochách polynomiální

Definice (determinant) nechť A je reálná matice. Pak determinant je

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\pi} (-1)^{\mathrm{sign}(\pi)} \overbrace{\prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)}}^{\text{transverzála}}$$

- polynomiální, jde řešit přes Gaussovu eliminaci

Definice (permanent) nechť A je reálná matice. Pak permanent je

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)}$$

- $\#P$-complete (alespoň tak těžký jako NP-úplný), neumíme nic lepšího

Příklad: $G = (V_1, V_2, E$ bipartitní graf, $A^{|V_1| \times |V_2|}$ $0-1$ matice podle toho, jaké obsahuje hrany. Pak $\mathrm{Per}(A)$ je počet perfektních párování G.

Generující funkce, které se hodí

$$\mathcal{P}(G, x, w) = \sum_{P \text{ perf. pár.}} x^{w(P)}$$

$$\mathcal{E}(G, x, w) = \sum_{E' \text{ sudá}} x^{w(E')}$$

$$\varphi(G, x, w) = \sum_{C \text{ hranový řez}} x^{w(C)}$$

Věta: G rovinný. Pak

$$\varphi(G) \equiv \mathcal{E}(G^*) \equiv \mathcal{P}(G^*_\Delta)$$

kde symbolem $\equiv$ rozumíme vzhledem k vypočítatelnosti a G_Δ následující operaci:

Rovněž předpokládáme $w(e) \in \mathbb{Z}, |w(e)| \leq |V(G)|^c$ pro c konstantu.

Věta (Kasteleyn) Když G rovinný, pak $\mathcal{P}(G, x, w)$ lze spočítat v polynomiálním čase.

Důsledek:

- umíme spočítat jak maximální párování, tak jejich počet (a počet všech ostatních párování s danými vahami)
- max. řez, max. perf. párování jsou pro rovinné grafy polynomiální

Důkaz (naznačení) pro D orientaci G, M_0 fixní PP definujeme „determinantní verzi“ $\mathcal{P}$ následně:

$$\mathcal{P}(\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{M}_\prime, \S, \sqsupseteq) = \sum_{P \text{ perf. pár.}} \mathrm{sign}(D, M_0, P) x^{w(P)}$$

kde

$$\mathrm{sign}(D, M_0, P) = (-1)^{\# \text{ } D\text{-sudých cyklů } M_0 \,\Delta\, P}$$

- D-sudý je, když v D má sudý počet hran orientovaných jedním směrem; nezáleží na tom, jakou stranou jdeme, jelikož symetrická diference perfektních párování tvoří jen sudé cykly

Postup důkazu:

- $\mathcal{P}(G, D, M_0, x, w)$ lze pro obecné grafy spočítat variantou Gaussovské eliminace (Pfaffion)
- Existuje orientace D^K, že všechna znaménka $\mathrm{sign}(D^K, M_0, P)$ jsou stejná, tedy

$$\mathcal{P}(G, D^K, M_0, *, w) = \pm\mathcal{P}(G, x, w)$$

- Tuhle D^K lze zkonstruovat v polynomiálním čase.

Připomenutí: pro další plochy je to trochu komplikovanější, ale jde to dělat podobně.

Pošťáci a cestující

Definice: $G = (V, E)$ graf silniční sítě, $l : E \mapsto \mathbb{Q}^+$:

- problém **čínského pošťáka:** najdi trasu minimální délky, která projde všechny *hrany* a vrátí se do výchozího vrcholu (eulerovský tah)
  - polynomiální
- problém **obchodního cestujícího:** najdi trasu minimální délky, která projde všechny *vrcholy* a vrátí se do výchozího vrcholu (hamiltonovskou kružnici)
  - NP-úplný

Problém (čínského pošťáka)

1. $G = (V, E)$ má **všechny stupně sudé** $\implies$ řešení je uzavřený eulerovský tah
   - **(👀):** když $H = (W, F)$ má všechny stupně sudé a $F \neq \emptyset$ je neprázdná, pak F má cyklus; odstraněním cyklu má opět všechny stupně sudé; opakováním dostaneme disjunktní sjednocení cyklů, což jde do eulerovského tahu udělat trivialně
2. nechť $T = \{v \mid \deg_G(v) \text{ lichý}\}$

(👀): $|T|$ je sudé (počet vrcholů lichého stupně je sudý) **Definice:** $E' \subseteq E$ je T-join, jestli graf $G_T = (V, E')$ splňuje

$$(\forall v \in V) \left(\deg_{G_T}(v) \text{ lichý} \iff v \in T\right)$$

Věta: nechť $E' \subseteq E$ je množina hran min. trasy čínského pošťáka, které se projdou více než jednou. Pak

1. se projdou 2-krát
2. E' je min. T-join (kde T je výše definovaná množina)

Důkaz: **(👀):** nechť G' vznikne z G dodáním násobných hran, násobnost je podle počtu procházení minimální trasou P. Potom G' má všechny stupně sudé.

- $F = E(G') - E(G)$ jsou dodané hrany
- F nemá násobné hrany, protože pak bychom je mohli (po dvou) vynechat

Z pozorování plyne (1), jelikož F spolu s původními hranami dává 2 průchody.

Navíc jelikož $E(G') = E(G) \cup F$ je T-join, jelikož přesné splňuje definici (stupně budou liché v G', protože musí být sudé po přidaní do G). Navíc $E(G) \cup \overline{F}$ rozhodně nebude lepší než minimální cesta čínského pošťáka a tedy naše F.

Algoritmus (čínský pošťák)

1. najdi minimální T-join
   - použij konstrukci (modifikovanou) Fischera z minulé přednášky ($G \mapsto G_\Delta$), o čemž víme, že je polynomiální
   - *(alternativně)* uvažme pomocný graf $H = \left(T, \binom{T}{2}\right)$ a váha $w : \binom{T}{2} \mapsto \mathbb{Q}^+$, kde $w(\{u, v\}) =$ délka nejkratší cesty mezi u, v v G
     - nechť M je min. PP v H
     - nechť $F = \bigcup_{e \in M} P_e$, kde P_e je nejkratší cesta v G spojující vrcholy e
2. přidej zbylé hrany
3. profit?

Problém (obchodního cestujícího) předpokládáme

- $G = K_n$ (pro neexistující hrany nastavíme váhu na nekonečno)
- nezáporné délky
- trojúhelníková nerovnost $(\forall u, v, w \in V)\, l(u, v) + l(v, w) \geq l(u, w)$

Christofidesova heuristika

- viz moje poznámky z aproximačních algoritmů

Poděkování

- Davidu Kubkovi za zápisky, ze kterých jsem část z poznámek vytvářel