Diskrétní Matematika

poznámky z přednášky

Tomáš Sláma
12. 1. 2020

Toto PDF bylo automaticky vygenerováno z webové stránky https://slama.dev/diskretni-matematika, která je preferovaný způsob jak dokument číst. Za případné chyby způsobené převodem se omlouvám.

Obsah

Úvodní informace

Tato stránka obsahuje moje poznámky z přednášky Martina Mareše z akademického roku 2019/2020. Pokud by byla někde chyba/nejasnost, nebo byste rádi někam přidali obrázek/text, tak stránku můžete upravit pull requestem (případně mi dejte vědět na mail).

Relace

Definice (relace) relace mezi množinami $X, Y \equiv R \subseteq X \times Y$ (podmnožina kartézského součinu)

- prázdná: $\emptyset$ (nic s ničím)
- univerzální: $X \times Y$ (vše se vším)
- diagonální Δ_X: $\{(x, x) \mid x \in X\}$
  - matice relace má 1 na diagonále
- inverzní R^{-1}: $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
  - pozor: nemusí to být funkce!
- složená: $x\,(R \circ S)\,z \equiv \ \exists y \in Y : xRy \wedge ySz$
  - tzn. tj. musí existovat cesta (když si to představíme jako grafy)

Funkce

Definice (funkce) relace f mezi X, Y je funkce (zobrazení) $\equiv \forall x \in X\ \exists!\ y \in Y : xfy$

- speciální druh relace, ve kterém se z X zobrazuje „jen jednou"

- značíme $f : X \mapsto Y$ nebo $f\,(x) = y$
- **prostá:** $\forall x, x' \in X, x \neq x' : f\,(x) \neq f\,(x')$
- **na:** $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f\,(x) = y$
  - na každé y se něco zobrazí (klidně vícekrát!)
- **bijekce:** $\forall y \in Y\ \exists!\ x \in X : f\,(x) = y$
- pozn.: podle definice jdou všechny prvky z X někam do Y!

Vlastnosti relace

- **reflexivní**: $\equiv \forall x \in X : xRx$
  - diagonála
- **symetrická**: $\equiv \forall x, y \in X : xRy \iff yRx$
  - pozn.: $R^{-1} = R$
- **antisymetrická**: $\forall x, y \in X, x \neq y : xRy \implies \neg yRx$
  - alternativně: $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \implies x = y$ (je z toho lépe vidět diagonála)
  - např. menší než... musí to být pouze jedním směrem
- **tranzitivní**: $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$
  - hezky vidět na grafech, špatně na maticích

Ekvivalence

Definice (ekvivalence) Relace R na X je ekvivalence $\equiv R$ je **tranzitivní, reflexivní** a **symetrická**.

- ekvivalenční třída $R\,[x]$ prvku $x := \{y \in X \mid xRy\}$ (jsou spolu mezi sebou všechny v relaci)

Věta: Nechť R je ekvivalence na X. Potom:

1. $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$

- vyplývá z reflexivity… $x \in R[x]$

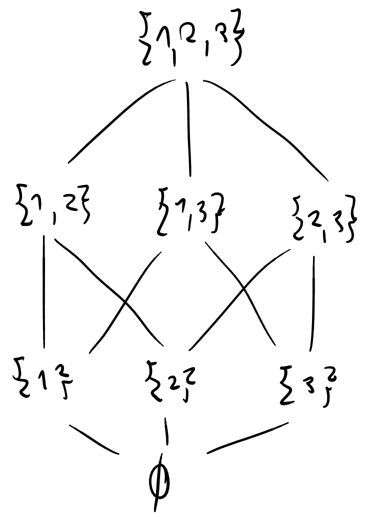
2. $\forall x, y \in X$: buď $R[x] = R[y]$ nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$
   - pro $R[x] \subseteq R[y]$: uvažme $z \in R[x]$, tím pádem zRx (symetrie) a zRy (tranzitivita), proto i xRy a tedy $z \in R[y]$ (pak stačí obrátit…)
   - xRy neplatí – sporem dokážeme, že $R[x] \cap R[y] = \emptyset$… nechť existuje $z \in R[x] \cap R[y]$; potom xRz a zRy (tranzitivita), a tedy xRy, což je
3. ekvivalenční třídy určují R jednoznačně
   - zřejmé… xRy právě když $\{x, y\} \subseteq R[x]$

Uspořádání

Definice (uspořádání) Relace R na X je uspořádání $\equiv$ R je **reflexivní, antisymetrická** a **tranzitivní.**

- **lineární** $\leq$: $\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$ (všechny x, y jsou porovnatelné)
- **částečné** = ne lineární
- **ostré**: pokud $\leq$ je uspořádání, pak $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$ je ostré uspořádání
- $\geq := \leq^{-1}$ je také uspořádání (to samé platí pro ostré)

Definice (Hasseův diagram) Uvažme uspořadání $(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$. Jeho Hasseův diagram bude vypadat následně:



- spojujeme **bezprostřední předky**, tj.: neexistuje $t \in X$ mezi x, y takové, že $x < t < y$
- x je **minimální** (maximální) prvek $\equiv \nexists\, y : y < x$
  - tzn. *neexistuje menší*
- x je **nejmenší** (největší) prvek $\equiv \forall y : x \leq y$
  - tzn. *je menší než všechny ostatní*
  - silnější kritérium než minimální, jelikož musí se všemi být porovnatelný
  - nejmenší je rovněž minimální

Definice (lexikografické uspořádání) Nechť X je abeceda a $\leq$ uspořadání na X. Pak definujeme lexikografické uspořádání $\left(X^2, \leq_{LEX}\right)$ následně:

$$(a, b) \leq_{LEX} (a', b') \equiv (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

- nejprve se rozhoduje podle prvního, pak podle druhého
- lze generalizovat pro více (kartézský součin) množin

Dlouhý a široký

Definice ((anti)řetězec) pro $(X, \leq)$ ČUM (částečně uspořádaná množina):

- $A \subseteq X$ je *řetězec* $\forall a, b \in A$ jsou porovnatelné

- $\omega(X, \leq) :=$ délka nejdelšího řetězce
- $A \subseteq X$ je *antiřetězec* $\equiv$ žádné 2 prvky nejsou porovnatelné (nezávislá množina)
  - $\alpha(X, \leq) :=$ délka nejdelšího antiřetězce

Věta (o dlouhém a širokém) pro $(X, \leq)$ konečnou ČUM: $\alpha\omega \geq |X|$

Důkaz:

- $M_1 := \{a \in X \mid a \text{ je minimální v } \leq\}$
- $X_1 := X \setminus M_1$
- pokračujeme a vyjde nám, že $\forall i : |M_i| \leq \alpha$ (všechny totiž musí být nezávislé); rovněž $\exists a_k \in M_k, a_{k-1} \in M_{k-1} \ldots$ řetězec $\implies k \leq \omega$
  - kombinací dojdeme k nerovnosti $|X| = \sum_{i=1}^{k} |M_i| \leq \alpha\omega$

Věta (Erdős-Szekeres) nechť $x_1, \ldots, x_{n^2+1}$ jsou navzájem různé. Pak existuje buď rostoucí nebo nerostoucí posloupnost délky alespoň $n+1$.

Důkaz: Na $\left\{1, \ldots, n^2+1\right\}$ definujme uspořádání $i < j \iff i < j \wedge x_i < x_j$. Rostoucí odpovídají řetězcům, nerostoucí antiřetězcům.

Segway do kombinatorického počítání

Věta: je-li A a-prvkové a B b-prvkové, pak počet $f : A \mapsto B = b^a$

Důkaz: každý prvek z A můžeme (z definice dokonce musíme) poslat do libovolného prvku z B.

Věta: $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$

Důkaz: pro $Y \subseteq X$ zavedeme *charakteristickou funkci* $C_Y : X \mapsto \{0, 1\}$, kde

$$C_Y(x) \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

Každá C_Y jasně určuje unikátní podmnožinu, tím pádem vlastně počítáme funkce z n-prvkové do 2-prvkové množiny, kterých je 2^n (viz předešlá věta).

Věta: je-li A a-prvkové a B b-prvkové, pak počet $f : A \mapsto B$ prostých je

$$\prod_{i=0}^{a-1} (b - i) = b^{\underline{a}}$$

Důkaz: Důkaz: 1. prvek z a má b možností, druhý $b-1$, …

Počítání dvojic: $f : \{1, 2\} \mapsto X \equiv X^2$

- prvky jsou dvojice $(f(1), f(2))$
- $\{1, \ldots, k\}$ – uspořádání k-tice
- $\mathbb{N} \mapsto X$ – nekonečné posloupnosti prvků z X

Počet k-tic různých prvků z X… $f : \{1, \ldots, k\} \mapsto X$ je

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)$$

- $n = |X|$ (stejné jako počítání prostých funkcí)

Počet bijekcí mezi X a X (permutací) $= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 := n!$ (faktoriál)

Kombinatorika

- pár definic na rozjezd:

$$\binom{X}{k} := \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Věta: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$

Důkaz: budeme počítat dvěma způsoby:

- # (počet) uspořádaných k-tic různých prvků z X je stejný jako:
  - # prostých funkcí z $\{1, \ldots, k\} \mapsto X$, kterých je $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
  - # k-prvkových množin $\cdot\ k!$ (zpermutováním)… $\left|\binom{X}{k}\right| \cdot k!$

Vlastnosti kombinačních čísel:

- počet prázdných podmnožin = 1 = počet „plných" podmnožin: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
- počet 1-prvkových podmnožin= n =počet podmnožin, kde 1 prvek chybí: $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$
- generalizace předchozích dvou vzorečků… počítání doplňků: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- počet podmnožin dané množiny: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  - vlastně n-bitové číslo – patří/nepatří

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- k-prvkové množiny obsahující/neobsahující n… když obsahují, tak máme zbylých k míst; když ne, tak $k-1$ (samotné n jedno zabírá)

Binomická věta

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Důkaz:

- jedná se o *součty součinů*, které si ze závorek vybírají a nebo b
  - $a^{n-k}b^k$ – celkově jich musí být n
  - $\binom{n}{k}$ – kolika způsoby si lze z n závorek vybrat k znaků

Poznámka:

- $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ – součet řady Pascalova trojúhelníka
- $(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ – počet podmnožin sudé velikosti je roven počtu podmnožin velikosti liché

Odhady pro faktoriál

- triviální: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$
- rozumný: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
- wtf: $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Lemma (a/g nerovnost) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \qquad \forall x, y \geq 0$

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\
a^2 + b^2 &\geq 2ab \\
\frac{a^2+b^2}{2} &\geq ab \\
\frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy}
\end{aligned}
$$

Důkaz (rozumného)

- $n! = \sqrt{(n!)^2} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \sqrt{1 \cdot n} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)} \cdot \ldots \cdot \sqrt{n \cdot 1}$
  - horní: $\sqrt{i\,(n-i+1)} \leq^{\mathrm{AG}} \frac{i+n-i+1}{2} \implies n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (je jich n)
  - dolní: $\sqrt{i\,(n-i+1)} \geq \sqrt{n} \implies n! \geq \sqrt{n}^n$ (vevnitř je vždy alespoň n)

Důkaz (wtf) Indukce:

- $n = 1$… $e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} \leq 1$
- $n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
n! = n\,(n-1)! \leq^{\mathrm{IP}} en\,(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\
&= en\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n (n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\
&= en\left(\frac{n}{e}\right)^n \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n e}_{\leq 1}
\end{aligned}
$$

Důkaz, toho proč ten výraz ≤ 1:

$$
\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n e \leq \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n e = e^{-1}e = 1 \qquad 1 + x \leq e^x
$$

- pozn.: $a \leq b \implies a = bc$ pro $c \leq 1$, proto to vlastně děláme

Princip inkluze/exkluze

Věta (inkluze a exkluze) Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom:

$$
\left|\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|
$$

Také lze zapsat jako

$$
\left|\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|
$$

Důkaz (počítací) kolikrát se prvek x nachází nalevo a napravo:

- nalevo: 1 (ve sjednocení je jednou právě)
- napravo:
  - předpokládejme, že se vyskytne v j množinách – vyskytuje se tedy v každé k-tici z těchto j množin ($k \leq j$)
  - existuje $\binom{j}{k}$ k-prvkových podmnožin j-prvkové množiny (a ve vzorci se znaménka střídají), lze počet výskytů vyjádřit následovně:

$$
j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \ldots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j} = 1
$$

Grafy

Definice (graf) graf je *uspořádaná dvojice* množin (V, E), kde V je *konečná, neprázdná* množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

- $\{u, v\} \in E$… mezi u, v vede hrana (jsou sousední)
- $v \in e$ pro $e \in E$… vrchol leží v/na hraně

Odrůdy

- **úplný** $K_n \equiv \left([n], \binom{V}{2}\right)$
  - opak je **diskrétní**
- **úplný bipartitní** $K_{m,n}$:
  - $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}$ (rozdělíme na 2 části)
  - $E(K_{m,n}) = \{\{a_i, b_j\} \mid i \in [m], j \in [n]\}$
  - bipartitní – $E \subseteq$ úplného bipartitního
- **cesta** $P_n \equiv ([n], \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i < n\})$
- **cyklus** $C_n \equiv ([n], \{\{i, (i+1) \mod n\} \mid 0 \leq i \leq n\})$

Definice (izomorfismus) grafy G a H jsou **izomorfní** $(G \cong H) \equiv f : V(G) \mapsto V(H)$ bijekce t. ž. $\forall u, v \in V(G)$ platí: $\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$

- vlastně to je takové přejmenování vrcholů

Grafové odhady

Nechť $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

- počet *všech* grafů na V je $2^{\binom{n}{2}}$ (všechny možné dvojice; buďto tam jsou nebo nejsou)
- počet *neizomorfních* grafů: počet všech grafů / počet tříd izomorfismu (ekvivalence)
  - izomorfismů je nejvýše $n!$ (uvažujeme všechna přejmenování)
  - celkem tedy $\geq 2^{\binom{n}{2}}/n!$
  - není to tak špatný odhad:

$$\begin{aligned}\log \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} &\geq \binom{n}{2} - n \log n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - n \log n \\ &= \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2 \cdot \log 2n}{n}\right)\end{aligned}$$

Vlastnosti grafu

- **stupeň vrcholu** v grafu G je $\deg_G(v) = \#w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)$
  - tzn. kolik hran vede do vrcholu
  - k-regulární graf: stupeň všech vrcholů je k
- **skóre grafu** je uspořádaná n-tice stupňů všech vrcholů
  - typicky $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$
  - $0 \leq d_i < n - 1$

Tvrzení:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Důkaz: nechť K je $\{(v,e) \mid e \in E(G) \wedge v \in e\}$; pak

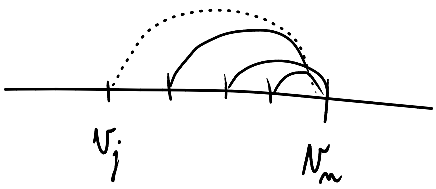
$$|K| = 2 \cdot |E(G)| = \sum_v \deg(v)$$

- první rovnost platí, jelikož každá hrana přispěje 2x
- druhá rovnost platí, jelikož každý vrchol přispěje všemi hranami, které do něj jdou (tj. svým stupňem)
- vyplývá z toho *princip sudosti*: počet vrcholů lichého stupně je sudý (jinak by se to nesečetlo na sudé číslo

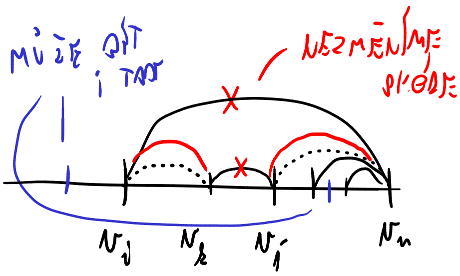
Věta (testování skóre) nechť $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ posloupnost přirozených čísel. Pak $d'_1, d'_2, \ldots d'_{n-1}$ vznikne smazáním posledního prvku a odečtením 1 od d_n předchozích. Pak $d_1 \leq d_2 \leq \ldots d_n$ je skórem grafu, když $d'_1, d'_2, \ldots d'_{n-1}$ je skórem grafu.

Důkaz:

- $\Rightarrow$: víme, že $d'_1, d'_2, \ldots d'_{n-1}$ je skórem grafu, stačí tedy přilepit vrchol a propojit ho patřičnými hranamy k existujícímu grafu:
  - $V(G) = \{v'_1, \ldots, v'_{n-1}, v_n\}$
  - $E(G) = E(G') \cup \{\{v'i, v_n\} \mid n - d_n \leq i \leq n-1\}$
  - pozor! opačně nefunguje, jelikož nemáme jistotu, že odebíráme od těch zprava
- $\Leftarrow$:
  - nechť $\mathcal{G} := \{G \text{ na } \{v_1, \ldots, v_n\}, \mid \forall i : \deg_G(v_i) = d_i\}$
    - $=$ všechny možné grafy s tímhle skórem
  - lemma: $\exists\, G \in \mathcal{G} : \forall j, n - d_n \leq j < n : \{v_j, v_n\} \in E(G)$
    - tedy existuje graf, od kterého můžeme odtrhnout poslední vrchol (ten s největším stupněm) a dostaneme správné skóre
  - nechť $j(G) := \max\{j \mid \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$ (první díra zprava)



- nechť $G \in \mathcal{G}$ má minimální $j(G)$... pak $j < n - d_n$
  - důkaz sporem: kdyby $j \geq n - d_n$, pak $\exists i$ a $\exists k : \{v_j, v_k\} \in E(G) \wedge \{v_i, v_k\} \notin E(G)$
    - pro $d_i < d_j$ – z v_j jich vede více než s d_i (takže do nějaké do které d_j vede d_i nevede)
    - $d_i = d_j$ je taky ok... jedna z v_i vede do v_n



- škrtnutím vyrobíme graf, který má menší j...

Definice (podgraf) Graf H je *podgrafem* grafu $G\,(H \subseteq G) \equiv V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$.

- vznik tak, že z grafu odebíráme hrany/vrcholy

Definice (indukovaný podgraf) Graf H je *indukovaným podgrafem* grafu $G\,(H \subseteq G) \equiv V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) = E(G) \cup \binom{V(H)}{2}$.

- vznik tak, že z grafu odebíráme pouze vrcholy (a s nimi spojené hrany)

Definice (cesta) v grafu délky k je (2 pohledy):

1. $H \subseteq G$ t. ž. $H \cong P_k$

2. $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ t. ž.:
    - $\forall i : v_i \in V(G)$ + všechny v_i jsou různé vrcholy
    - $\forall j : e_j \in E(G) \wedge e_j = \{v_{j-i}, v_j\}$

- obdobně lze definovat kružnici, jen $v_e = v_k$

Definice (sled) (procházka/walk) v grafu G je cesta, ve které se mohou vrcholy i hrany opakovat.

Tvrzení: pokud existuje sled z x do y, pak existuje i cesta.

- zvolíme nejkratší ze všech sledů… to je cesta; kdyby ne, pak $\exists$ vrchol, který se tam vyskytuje 2x (tím pádem jde sled zkrátit)

Definice (souvislost) Graf G je *souvislý* $\equiv \forall u, v \in V(G) \, \exists$ cesta v G z u do v

- relace dosažitelnosti: $\sim$ na $V(G)$: $u \sim v \equiv \exists$ cesta z u do v
    - je to ekvivalence: je *reflexivní* (cesta z u do u velikosti 0), *symetrická* (graf je neorientovaný) i *tranzitivní* (jen pozor na to, že to po slepení může být sled – je potřeba to ošetřit)

V souvislém grafu G je vzdálenost vrcholu u, v *minimum* z delek cest z u do v (značíme $\rho(u, v)$).

- jedná se o *metriku*, jelikož splňuje následující:
    1. $\forall u, v : \rho(u, v) \geq 0$
    2. $\forall u, v : \rho(u, v) = 0 \iff u = v$
    3. $\forall u, v : \rho(u, v) = \rho(v, u)$
    4. $\forall u, v, w : \rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ (trojúhelníková nerovnost)

Grafové operace

- *přidání* hrany/vrcholu: $G + v$, $G + h$
- *smazání* hrany/vrcholu:
    - $G - e := G(V, E \setminus \{e\})$
    - $G - v := G(V \setminus v, E \setminus \{e \in E \mid v \notin e\})$
- *dělení* hrany $G \,\%\, e := (V \cup \{z\}, (E \setminus \{x, y\}) \cup (\{x, z\}, \{z, y\}))$
- kontrakce hrany $G/e := ((V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}, \{e \in E \mid e \cap \{x, y\} \neq \emptyset\} \cup \{(e \setminus \{x, y\}) \cup \{z\} \mid e \in E \wedge |e \cup \{x, y\}| = 1\})$

Stromy

Definice (strom les, list)

- strom je *souvislý acyklický graf*
- les je *acyklický graf* (soubor stromů)
- list – vrchol stromu s $\deg(v) = 1$

Tvrzení: Strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 *listy* (vrcholy, do kterých vede 1 hrana).

Důkaz: uvažme nejdelší cestu. Její krajní vrcholy jsou listy, jelikož:

- pokud z nich vede cesta někam zpět do sebe, tak graf není strom
- pokud z nich vede cesta někam, kde jsme ještě nebyli, tak není nejdelší

Tvrzení: nechť v je list grafu G. Pak G je strom $\iff$ $G - v$ je strom.

Důkaz:

- $\Rightarrow$… $G - v$ je acyklický (cyklus jsme odstraněním nevytvořili) a souvislý (vedla přes něj pouze 1 cesta, a to ta do něj)
- $\Leftarrow$… po přilepení je také souvislý ($\forall x \in G - v \exists$ cesta z x do v) a acyklický (přilepený vrchol má stupeň 1, nemůže tedy tvořit cyklus)

Věta (charakteristika stromu) následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je souvislý a acyklický (standardní)
2. mezi každými vrcholem x, y vede *právě 1 cesta* (jsou jednoznačně souvislé)
3. G je souvislý a $\forall e \in E(G) : G - e$ souvislý není (je minimálně souvislý)

4. G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) : G + e$ obsahuje cyklus (je maximálné acyklický… přidáním libovolné hrany se vytvoří cyklus)
5. G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ (Eulerova formule)

Důkaz: $1 \implies 5$: indukcí:

- $n = 1$ sedí (0 hran, 1 vrchol, je to strom)
- $n \to n + 1$… nechť G má $n + 1$ vrcholů…
  - G má list (lemma), jehož odtržením máme stále strom (G')… poštváním IP máme důkaz

$1 \implies 2$: indukcí:

- $n = 1$ platí
- po přilepení:
  - zachová všechny staré cesty
  - $\forall x \in V(G - v)\, \exists!$ cesta $x \sim s$ a $\forall$ cesty $x \sim v$ jsou tvaru $x \sim s \sim v$ (jsou jednoznačné)

$1 \implies 3$: indukcí:

- pro $n = 2$ platí (odebráním hrany se vrcholy rozpadnou)
- indukce $n + 1 \to n$:
  - IP: graf n se rozpadne
  - po odebrání $n + 1$ hrany se graf také rozpadne

$1 \implies 4$:

- acykličnost sedí
- přidáním hrany vytvoříme cyklus, jelikož tam již existuje cesta a tohle vytvoří druhou
  - pozor! neplést si s implikací $4 \implies 1$; tohle *není spor*

$2 \implies 1$:

- je tím pádem souvislý
- kdyby existovala kružnice, pak existují 2 různé cesty

$3 \implies 1$:

- souvislost sedí
- kdyby existoval cyklus, tak se odstraněním nestane nesouvislý

$4 \implies 1$:

- acykličnost sedí
- kdyby nebyl souvislý, tak přidání nevytvoří cyklus

$5 \implies 1$ – indukcí podle počtu vrcholů:

- existuje vrchol, který je list
- koukneme na skóre: $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E(G)| = 2n - 2$
  - $d_i \geq 1$ (souvislost) a alespoň 1 je 1 (kdyby ne, tak $d_i > 1$, což je v součtu alespoň $2n$) a máme tedy list; jeho odtržením máme podle IP (graf má po odtržení stupeň $2(n-1) - 2$) strom, a po přilepení je to opět strom

Kostra, sled, tahy

Definice (kostra) grafu G je graf $H \subseteq G : V(H) = V(G) \land H$ je strom

- nesouvislý graf nemá kostru

Definice (tah) je sled, ve kterém se neopakují hrany.

- *uzavřený/otevřený* – koncové vrcholy tahu jsou/nejsou stejné
- *Eulerovský* – obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu

Věta: v grafu G existuje *uzavřený Eulerovský tah* $\iff$ je souvislý a $\forall\, v \in G : \deg(v)$ je sudý

- $\Rightarrow$: je souvislý (všude se lze dostat tahem) i sudý (všechny hrany vedoucí do daného vrcholu lze spárovat, protože do něj vcházíme a vycházíme)

- $\Leftarrow$: uvážíme *nejdelší možný tah:*
  - je *uzavřený*, jelikož kdyby nebyl, pak je počáteční i koncový vrchol tahu lichý, ale sudost znamená, že jsme nějaké hrany nevyužili… tah tedy není maximální
  - je *Eulerovský*, protože:
    - obsahuje všechny vrcholy; kdyby ne, tak jej lze připojit a vytvořit tak větší tah
    - obsahuje všechny hrany; víme, že obsahuje všechny vrcholy, proto je hrana mezi již nakreslenými vrcholy… tu ale lze také přidat
  - POZOR: je potřeba si dávat pozor na pořadí, ve kterém tuhle implikaci dokazuji – záleží na něm

Rozšiřování grafů

Definice (multigraf) je uspořádaná trojice (V, E, K), kde:

- V jsou vrcholy ($V \neq \emptyset$)
- E jsou hrany
- K je zobrazení $E \mapsto \binom{V}{2} \cup V$ (sjednocení kvůli existenci smyček)

Definice (orientovaný graf) je (V, E), kde $E \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$ (lze u multigrafu rozšířit obdobně)

- hodí se rozlišovat vstupní ($\deg^{\text{in}}$) a výstupní ($\deg^{\text{out}}$) stupně

Definice (podkladový graf)

- u orientovaného zapomeneme orientaci
- u multigrafu zrušíme opakování hran

Definice (souvislost)

- *slabá* – dosažitelnost v podkladovém
- *silná* – $\forall u, v \in V \exists$ cesta z do v

Věta: pro *vyvážený* orientovaný multigraf G je ekvivalentní:

1. G je slabě souvislý
2. G má uzavřený Eulerovský tah
3. G je silně souvislý

Důkaz:

- $3 \implies 1$ již víme (podkladový je obecnější)
- $2 \implies 3$ tahem se dostaneme kdekoliv potřebujeme
- $1 \implies 2$ stejné jako důkaz u neorientovaného

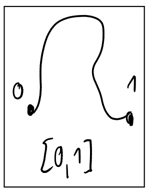
Rovinné nakreslení grafu

Definice (bod) je prvek $\mathbb{R}^2$

Definice (křivka) je prostá a spojitá množina bodů

Definice (jednoduchá křivka = oblouk) je $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ spojitá a prostá.

- jednoduchá **uzavřená** křivka = kružnice: prostá až na $f(0) = f(1)$



Definice (rovinné nakreslení) multigrafu (V, E, K) je $\nu : V \mapsto \mathbb{R}^2$ a $\{C_e \mid e \in E\}$ množina oblouků/topologických kružnic t. ž.:

1. $\forall e \in E : K(e) = \{u, v\}$: C_e je oblouk s konci $\{\nu(u), \nu(v)\}$
   - za každou hranu existuje oblouk
2. $\forall e \in E : K(e) = u$: C_e je kružnice obsahující $\nu(u)$
   - smyčky
3. $\forall e, f$ různé $\in E : C_e \cap C_f = \nu[K(e) \cap K(f)]$
   - průniky jsou jen vrcholy
4. $\forall v \in V, \forall e \in E : \nu(v) \in C_e \implies v \in K(e)$
   - protíná-li kružnice vrchol, pak je vrchol na té hraně

Definice (rovinnost) Graf je *rovinný*, pokud existuje nějaké jeho rovinné nakreslení.

- cesta je rovinná
- kružnice je rovinná
- strom je rovinný… indukcí (přidáváním listů), jelikož vždy se lze posunout alespoň o kousek dále

Definice (topologický graf) graf nakreslený do roviny.

Věta (Jordanová věta) Nechť T je topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$. Pak $\mathbb{R}^2 \setminus T$ má právě 2 komponenty obloukové souvislosti: 1 omezenou, 1 neomezenou a T je jejich společnou hranicí.

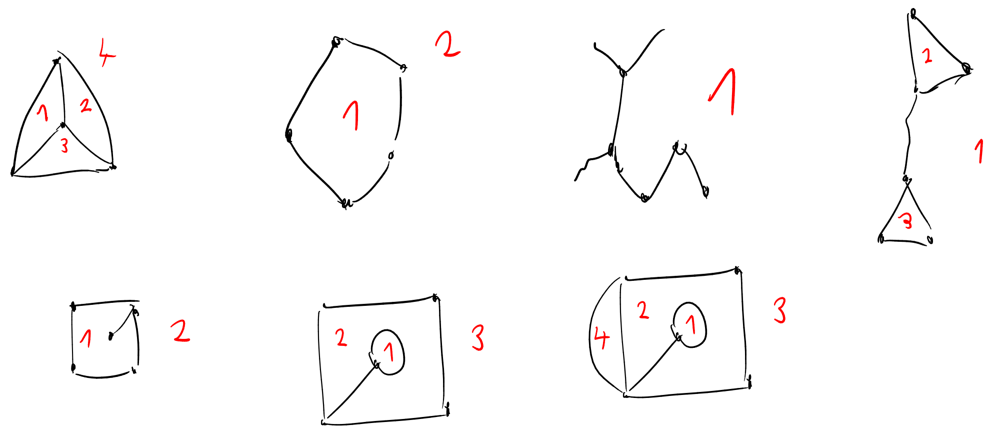
- těžké dokázat

Věta: K_5 není rovinná.

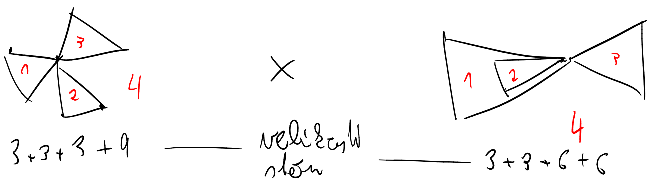
Důkaz: Po rovinném nakreslení K_4 je zřejmé, že z každé stěny jsou dosažitelné právě 3 vrcholy – K_5 proto rovinná být nemůže.

Definice (křížící číslo) min. počet křížení.

Definice (stěny nakreslení) komponenty obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{\nu(v) \mid v \in V\} \bigcup_{e \in E} C(e)\right)$



- nechová se jako izomorfismus!



Věta: hranice každé stěny souvislého grafu je nakreslením uzavřeného sledu, který každou hranu obsahuje nejvýše dvakrát.

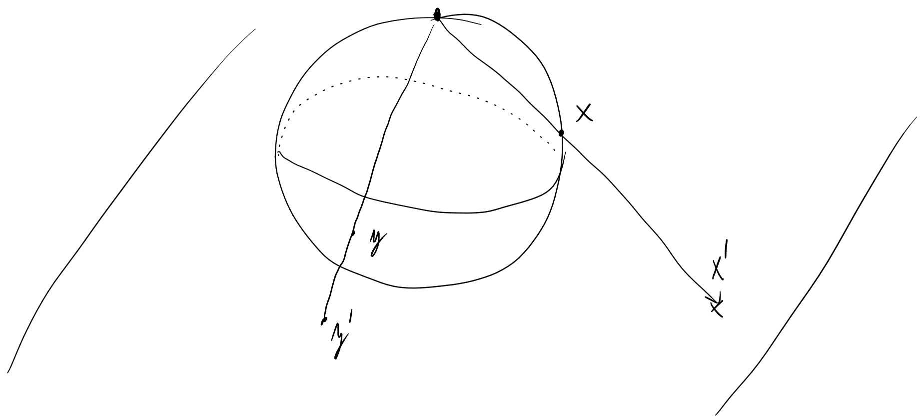
Důkaz: indukce podle počtu hran (počet vrcholů je pevný):

1. pro strom: počet hran = počet vrcholů - 1; nakreslení má právě 1 stěnu; sled je DFS
2. pro $|E| > |V| - 1$: obsahuje kružnici… nechť $e = \{u, v\}$ leží na kružnici; rozdělíme ji na 2 sledy

Věta: G má nakreslení na sféru $\iff$ G je rovinný.

Důkaz: uděláme *stereografickou projekci*… jedná se o bijekci

- pozor! je potřeba ji natočit tak, ať se netrefíme do grafu



Věta (Kuratowského) G není rovinný $\iff \exists H \cong G$ t. ž.: $H \cong$ nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$

Věta (Eulerova formule) nechť G je souvislý graf nakreslený do roviny. Pak $v + f = e + 2$

Důkaz: fixujeme v, indukce podle e:

- graf je strom: $e = v - 1; f = 1$... $v + f = e + 2$
- IK: uvažme h na kružnici a podívejme se na $G - h$
  - $v' = v$
  - $e' = e - 1$ (odebrání hrany)
  - $f' = f - 1$ (spojení dvou stěn)

Definice: G je maximálně rovinný $\iff$ G je rovinný a $G + e$ není rovinný $\forall e \notin E(G)$.

Věta: pro maximálné rovinný graf G s $v \geq 3$ jsou všechny jeho stěny trojúhelníky.

Definice:

1. každý maximální graf je souvislý (pokud ne, tak lze nesouvislé komponenty spojit)
2. kdyby existovala stěna s hranicí C_n pro $n > 3$, pak můžeme v rámci stěny přidat hranu
3. strana, jejíž hranice není kružnice neexistuje (mohli bychom přidat stěnu)

Věta: Nechť G je maximálně rovinný s $v \geq 3$ vrcholy. Pak $e = 3f/2$.

Důkaz: Každá stěna je trojúhelník $(3f)$ a patří právě do dvou stěn $(/2)$... počítání dvěma způsoby.

- pozn.: můžeme dosadit do Eulerova vzorce (jelikož je zajisté souvislý) a dostaneme $v + \frac{2}{3}e = e + 2 \implies e = 3v - 6$
  - je z toho přímo vidět, že K_5 není rovinná

Věta: v každém rovinném grafu existuje vrchol t. ž. $\deg(v) \leq 5$

Důkaz:

- pro počet vrcholů ≤ 2 triviální
- pro ostatní: $e \leq 3v - 6 \implies$ průměrný stupeň < 6
  - $2e \leq 6v - 12 \implies 2e < 6v \implies \frac{2e}{v} < 6$ ($2e$ je součet všech stupňů)

Věta: Nechť G je maximálně rovinný vez trojúhelníků. Pak $e \leq 2v - 4$.

Důkaz: počítání dvěma způsoby: $e \geq 4f/2$ (každá hrana patří do dvou stěn, které jsou tvořeny ≥ 4 hranami. Dosazením do Eulera dostaneme nerovnost.

Barvení

Definice (obarvení) grafu G k barvami je funkce $C : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ t. ž. $\forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \implies C(u) \neq C(v)$

Definice (barevnost) (chromatické číslo $\chi(G)$) je nejmenší k t. ž. existuje obarvení grafu G k barvami.

- motivace: přidělování bez konfliktů

- $\chi(P_n) = 2$ (pro $n > 0$)
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ sudé} \\ 3 & n \text{ liché} \end{cases}$
- $\chi(K_n) = n$
- $H \subseteq G \implies \chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(G) = 1 \iff G$ nemá hrany
- $\chi(G) = 2 \iff G$ je bipartitní

Věta: pokud G nemá lichou kružnici, pak $\chi(G) \leq 2$.

Důkaz: graf je souvislý $\implies$ má kostru T. Nechť C je 2-obarvení T. Pokud by C nebylo obarvením G, pak $\exists$ cesta sudé délky z vrcholu u do v, jejíž propojením dostáváme lichý cyklus.

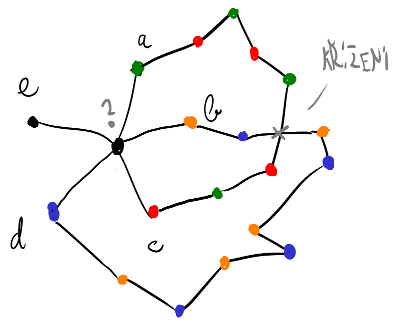
Tvrzení: Je-li T strom s alespoň 2 vrcholy. pak $\chi(T) = 2$

Důkaz: zakořeníme a barvíme po vrstvách.

Věta: každý rovinný graf je 5-obarvitelný.

Důkaz:

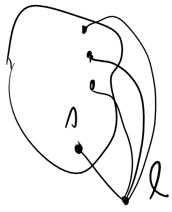
- pro $|V| \leq 5$ lze triviálně (prostě přiřadíme všechny barvy)
- indukcí podle počtu vrcholů: uvažme $v \in V(G)$ s minimálním stupněm – ten odtrhneme, graf podle IP obarvíme a rozebereme případy:
  - pro $\deg(v) \leq 4$… indukcí přiřadíme vrcholu zbylou barvu, jelikož sousedé zabrali nejvýše 4
  - $\deg(v) > 5$ nenastane (vztah $e = 3v - 6$)
  - pro $\deg(v) = 5$: pokud jsou nějaké barvy stejné, tak obarvíme zbylou; jinak uvažme zeleno-červený podgaf vycházející z vrcholu a… pro ten mohou nastat dva případy:
    1. pokud c nepatří do podgrafu, tak prohodíme *všechny barvy v podgrafu* a jedné se tím na problematickém vrcholu zbavíme
    2. pokud patří, tak uděláme totéž s vrcholy b a d; oba případy najednou nastat nemohou, jelikož by se křížily v hraně (nelze – poruší rovinnost) nebo ve vrcholu (nelze, ten už má barvu)



Degenerovanost, klikovost, dualita

Definice: graf G je d-degenerovaný $\equiv \forall H \subseteq G\ \exists v \in V(H) : \deg_H(v) \leq d$

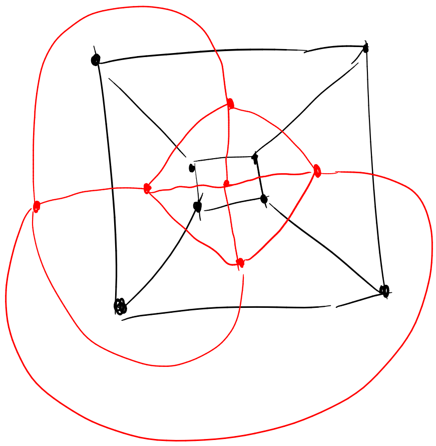
- pozor! neříká to, že $\forall v \in V(G) : \deg(v) \leq 5$, jelikož podgrafy trhají vrcholy a hrany
- každý strom je 1-degenerovaný
- rovinné grafy jsou 5-degenerované (viz. důkaz kousek zpět – stupně rovinných grafů)
- graf s max. stupněm Δ je Δ-degenerovaný
- obecně platí $\chi(G) \leq d + 1$
  - důkaz indukcí: odstranění má obarvení a ke přidání zpět je potřeba alespoň 1 volná barva



$\deg \leq d$

Definice: Pro G *nakreslený do roviny* definujeme G^* duální graf:

- ze stěny je vrchol (a obráceně)
- z hrany je hrana (bijekce)
- podle Eulerovy formule: v a f se *prohazuje*, e *zůstává*



Definice (klikovost) $\omega(G)$ je maximální k t. ž. G obsahuje K_k.

- $\chi(G) \geq \omega(G)$ (na K_k je potřeba k barev…

Pravděpodobnost

Definice (diskrétní pravděpodobnostní prostor) je (Ω, P).

- Ω je nejvýše spočetná množina *elementárních jevů* (hod mincí/kostkou/…)
- P je funkce $\Omega \mapsto [0, 1]$ („pravděpodobnost“) t. ž. $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
- klasický… $\forall x, y$ el. jevy platí $P(x) = P(y)$

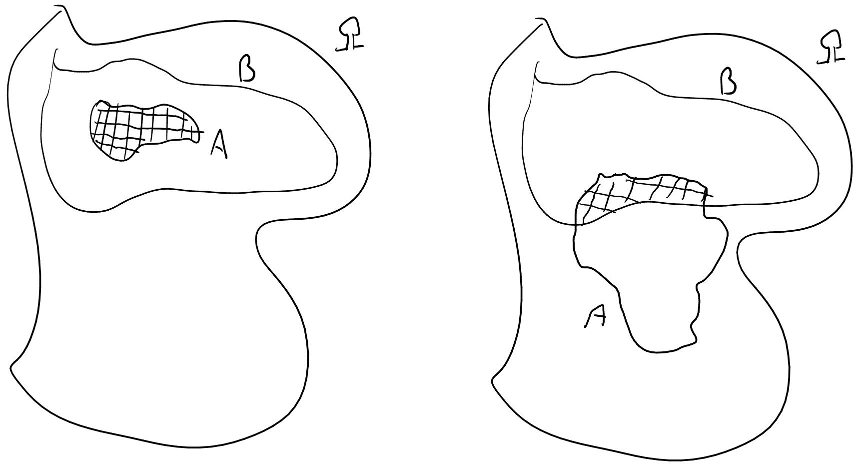
Definice (jev) X je množina elementárních jevů.

- $P[X] = \sum_{\omega \in X} P(\omega)$
- $P[\Omega] = 1$
- $P[\emptyset] = 0$

Podmíněná pravděpodobnost

$$P[A \mid B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- podmínkou vytváříme novou množinu elementárních jevů, která ale není normalizovaná (to zajišťuje dělení)
- vlastně to po přepsání na $P[A \mid B] \cdot P[B] = P[A \cap B]$ znamená: pravděpodobnost B krát pravděpodobnost, že v rámci B nastane A je šance jejich průniku ($P[A \cap B]$):



Věta (o úplné pravděpodobnosti) nechť $B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω a $\forall i : P[B_i] \neq 0$

$$\forall A : P[A] = \sum_i \underbrace{P[A \mid B_i] \cdot P[B_i]}_{P[A \cap B_i]}$$

Věta (Bayesova) nechť $B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω t. ž. $\forall i : P[B_i] \neq 0$ a A je jev. Potom $\forall i$:

$$P[B_i \mid A] = \frac{P[A \mid B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_j P[A \mid B_j] \cdot P[B_j]} = \frac{P[A \mid B_i] \cdot P[B_i]}{P[A]}$$

Důkaz (trochu pseudo)

$$P[B_i \mid A] \cdot P[A] = P[A \cap B_i] = P[B_i \cap A] = P[A \mid B_i] \cdot P[B_i]$$

Definice (nezávislé jevy) jevy A, B jsou nezávislé (B neovlivňuje A), pokud (ekvivalentní výroky):

1. $P[A \mid B] = P[A]$
2. $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

Obecněji: jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou po k nezávislé

$$\iff \forall I \in \binom{[n]}{k} : P\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} P[A_i]$$

- jevy jsou nezávislé $\iff$ jsou po k nezávislé $\forall k$

Definice (součin pravděpodobnostních prostorů) $P(\Omega_1, P_1)$ a (Ω_2, P_2) je pravděpodobnostní prostor (Ω, P) t. ž.:

- $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$
- $P((x_1, x_2)) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2)$
- pozn.: stále se pravděpodobnost sečte na jedničku: $\sum_{x1,x2} P_1(x_1) P_2(x_2) = 1 \cdot 1 = 1$

Definice (náhodná veličina) je $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (ale klidně i do jiné množiny… je to dost jedno)

- $P[f \geq 7] = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 7\}$
- *střední hodnota* náhodné veličiny X je $\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$
- linearita střední hodnoty: $\forall X, Y$ náhodné veličiny platí:
  - $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
  - $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
  - důkazy jsou přímočaré (dosazení do sumy)

Definice (indikátor) jevu $J_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nenastal} \\ 1 & \text{nastal} \end{cases}$

- $J = \sum_i J_i$

Pravděpodobnostní odhady

Věta (Markovova nerovnost) nechť X je náhodná *nezáporná* veličina, která má střední hodnotu, a $t \geq 1$; potom platí, že

$$P[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Důkaz: vycházíme ze střední hodnoty; iterujeme přes všechna $a \in R$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x] &= \sum_{a} P[x = a] \cdot a && //\text{definice} \\
&\geq \sum_{a \geq k} P[x = a] \cdot a && //\text{iterujeme přes více hodnot} \\
&\geq \sum_{a \geq k} P[x = a] \cdot k && //k \geq a \\
&= k \cdot \sum_{a \geq k} P[x = a] \\
&= k \cdot P[x \geq k]
\end{aligned}$$

- dosazením $k := t \cdot \mathbb{E}[x]$ dostáváme Markovovu nerovnost

Definice (variance = rozptyl) $\operatorname{var} X := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$

- $\sqrt{\operatorname{var} X}$ je *střední hodnota odchylky*

Věta (Čebyševova nerovnost) nechť X je náhodná veličina, která má střední hodnotu, a $t \geq 1$; potom platí, že

$$P\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sqrt{\operatorname{var} X}\right] \leq \frac{1}{t^2}$$

Důkaz: dosazení do Markovovy nerovnosti (jen pozor na odmocňování nerovnosti – abs. hodnota).