Kombinatorika a Grafy II

poznámky z přednášky

Tomáš Sláma
1. 3. 2021

Obsah

Úvodní informace

Tato stránka obsahuje moje poznámky z přednášky Martina Kouteckého z akademického roku 2020/2021. Pokud by byla někde chyba/nejasnost, nebo byste rádi někam přidali obrázek/text, tak stránku můžete upravit pull requestem (případně mi dejte vědět na mail).

1. přednáška

Největší párování

- TLDR celé této části jsem zpracoval do YouTube videa

Definice: Párování v $G = (V, E)$ je $M \subseteq E$ t. ž. $\forall v \in V \exists \leq 1$ hrana $e \in M : v \in e$

- **maximální** (do inkluze) – přidání další hrany pro dané párování už není možné; v přednášce nás nezajímá
- **největší** – $\max(|M|)$

Definice (volný vrchol) (vzhledem k M) – vrchol, kterého se nedotýká žádná hrana párování.

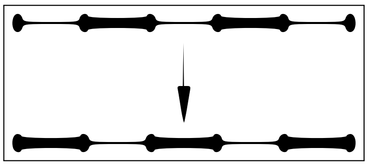
Definice (střídavá cesta) (vzhledem k M) – cesta, na které se střídají hrany v párování a hrany mimo párování: $u_0, \ldots, u_k$, kde každá sudá/lichá hrana je v M, lichá/sudá není v M

- **volná** střídavá cesta (VSC) – krajní vrcholy jsou volné (vůči párování)
- $\Rightarrow$ obsahuje lichý počet hran, sudý počet vrcholů

Tvrzení: Nechť $G = (V, E)$ je graf, M párování v G. Pak G obsahuje VSC (vzhledem k M), právě když M není největší párování v G.

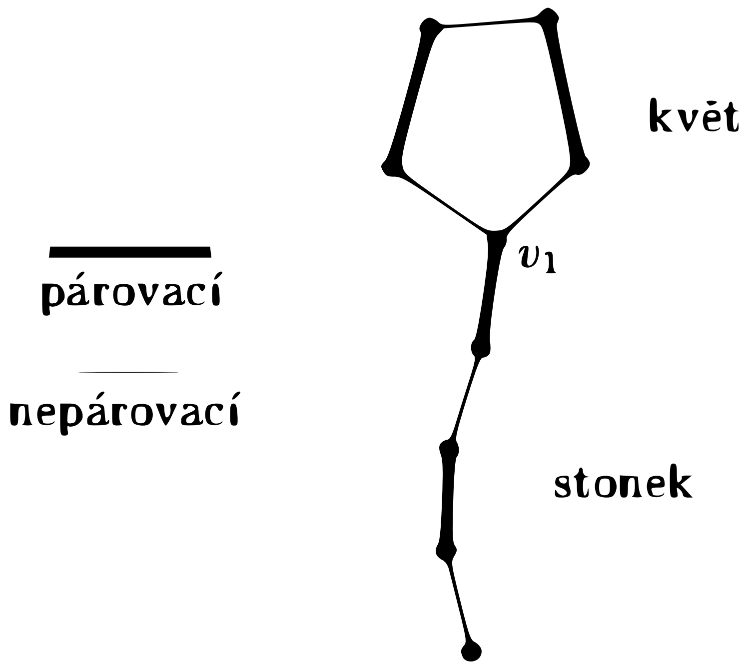
- $\Rightarrow$ pokud M má VSC, mohu M zvětšit prohozením hran
- $\Leftarrow$ pro spor nechť M' je párování v G t. ž $|M'| \geq |M|$
  - uvažme $H = (V, M \cup M')$; pak má každý vrchol stupeň $0, 1$ nebo $2 \Rightarrow$ komponenty souvislosti jsou kružnice sudé délky a cesty (navíc jsou střídavé)
  - **(👀):** musí existovat komponenta, která má více hran z M' (je větší)
    - není to kružnice (musela by být lichá a měli bychom máme kolizi ve vrcholu)
    - je to volná (z definice, vzhledem k M) střídavá (jinak by měly stejný počet hran) cesta

Definice (květ) lichá „střídavá“ kružnice s vrcholem v_1, ke kterému přiléhají dvě hrany $\notin M$ **Definice (stonek)** střídavá cesta z v_1 (i nulové) délky končící volným vrcholem (dál od květu)

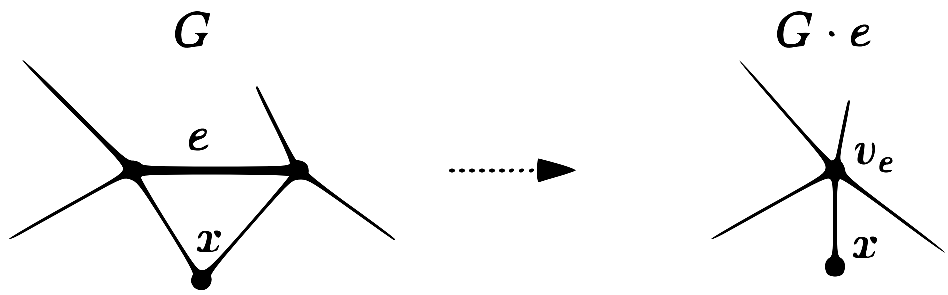


- v_1 může (a nemusí) být volný vrchol – stačí, aby byl volný vzhledem ke květu

Definice (kytka) květ + stonek



Definice (kontrakce hrany) Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf a $e = \{u, v\}$ jeho hrana. Zápis $G.e$ označuje graf vzniklý z G kontrakcí („smrštěním“) hrany e do jednoho vrcholu:

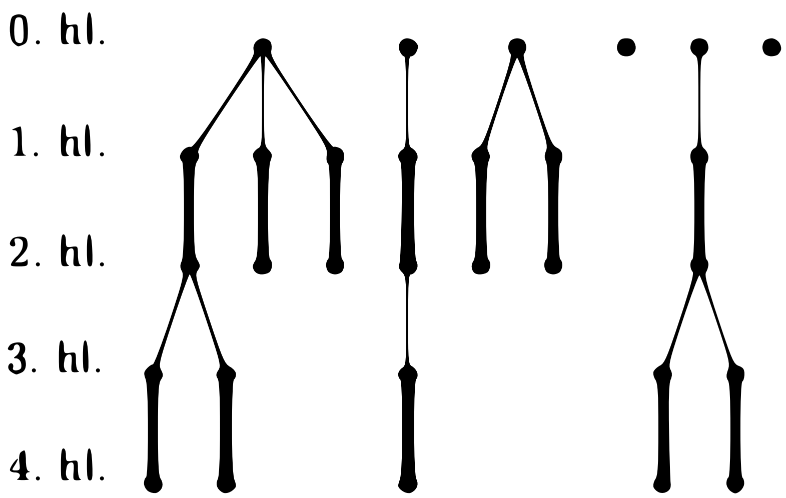


Tvrzení: Nechť C je květ v grafu G. Potom párování M v G je maximální, právě když $M \setminus E(C)$ je maximální párování v grafu $G.C$, tj. s květem C zkontrahovaným do jediného vrcholu. Navíc pokud znám VSC pro $M.C$, tak v poly. čase najdu VSC pro M v G.

Důkaz: Tady je sketchy důkaz, tady je míň sketchy důkaz.

Algoritmus (Edmondsův „zahradní/blossom“) vstupem je graf G a jeho libovolné párování M, třeba prázdné. Výstupem je párování M', které je alespoň o 1 větší, než M, případně M pokud bylo maximální.

- zkonstruujeme maximální možný **Edmondsův les** vzhledem k aktuálnímu M tím, že z volných vrcolů pustíme BFS a střídavě přidáváme vrcholy
  - hranám, které se v lese neobjeví, se říká kompost a nebudou pro nás důležité



- pokud existuje hrana mezi (potenciálně různými) sudými hladinami různých stromů, pak máme volnou střídavou cestu, kterou zalterujeme a jsme hotovi (párování je o 1 větší)
- pokud existuje hrana mezi (potenciálně různými) sudými hladinami jednoho stromu, máme květ C – ten zkontrahujeme a rekurzivně se zavoláme
  - vrátí-li $M' = M$, pak nic dalšího neděláme
  - vratí-li nějaké větší párování, tak z něho zkonstruujeme párování v G
- neexistuje-li hrana mezi sudými hladinami, pak $M' = M$

Tvrzení: Edmondsův algoritmus spuštěný na G a M doběhne v čase $\mathcal{O}(n \cdot (n+m))$ a najde párování M' alespoň o 1 hranu větší než M, případně oznámí, že M je největší $\Rightarrow$ nejlepší párování lze nalézt v čase $\mathcal{O}(n^2(n+m))$.

2. přednáška

Definice (perfektní párování) Párování M je perfektní, pokud neexistuje v G žádný volný vrchol.

Tutteova věta

Definice (Tutteova podmínka) $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$

- odd je počet lichých komponent grafu.

Věta (Tutteova věta) G má perfektní párování $\iff$ platí Tutteova podmínka.

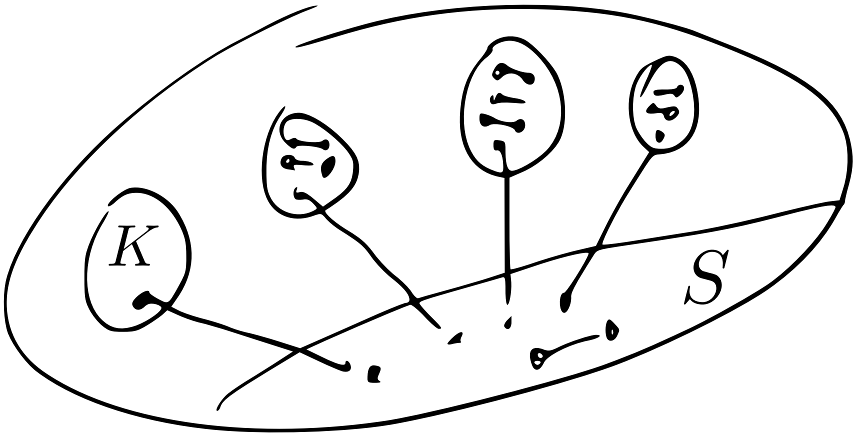
Důkaz: $\Rightarrow$ obměna: neplatí TP $\Rightarrow$ není PP. Nechť $\exists S \subseteq V$ t. ž. odd(G – S) $>$ $|S|$. V perfektním párování se alespoň 1 vrchol z každé liché komponenty musí spárovat s nějakým z S, ale těch není dostatek.

$\Leftarrow$ nechť G splňuje Tutteovu podmínku. $|V|$ je sudá (nastavíme S prázdnou). Dokážeme, že G má PP indukcí podle počtu nehran.

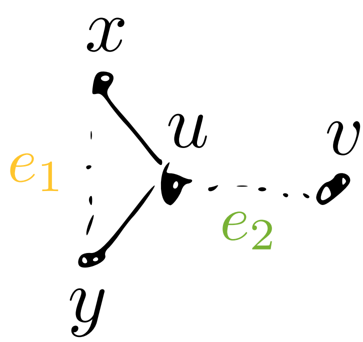
- **základ:** $G = K_{2n}$, ten PP má
- **indukční podmínka:** G má nehranu a každý graf na Vs počtem hran alespoň o 1 větší než $|E|$ a platí TP, pak má perfektní párování

Nechť $S = \{v \in V \mid \deg(v) = n - 1\} = \{v \mid v$ je spojený se všemi vrcholy$\}$

- lehký případ: každá komponenta $G - S$ je klika
  - sudé kliky spárujeme triviálně
  - v rámci liché kliky vypáruji vše až na jeden vrchol, ten spáruji v rámci S (S vidí všechny) a zbytek v S spáruji spolu (sudé komponenty do parity nepřispívají, liché + 1 z S také ne a v S tedy zbyde sudý počet vrcholů)



- alespoň 1 komponenta K není klika, tedy $\exists x, y \in K$ nesousední
  - ti mají společného souseda u (tvrzení o třešničce), který není v S
  - pro u existuje vrchol v, se kterým **není** spojený (jinak by u byl v S, což ale víme že není)



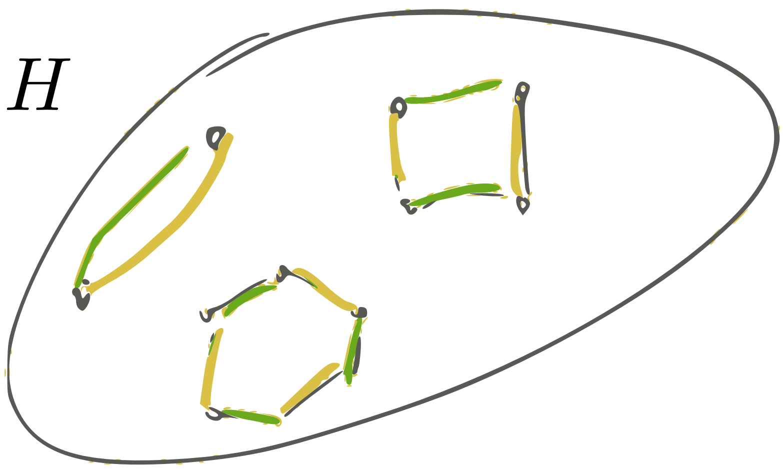
- **(👀):** přidáním hrany do grafu se neporuší TP ($\forall S \subseteq V$ počet lichých komponent $G - S$ buď klesne o 2 nebo zůstane stejný).

Indukujeme dvakrát: $G_1 = G + e_1$ a $G_2 = G + e_2$ díky předchozímu pozorování splňují TP a spolu s IP $\Rightarrow \exists$ PP M_1, M_2 v G_1, G_2

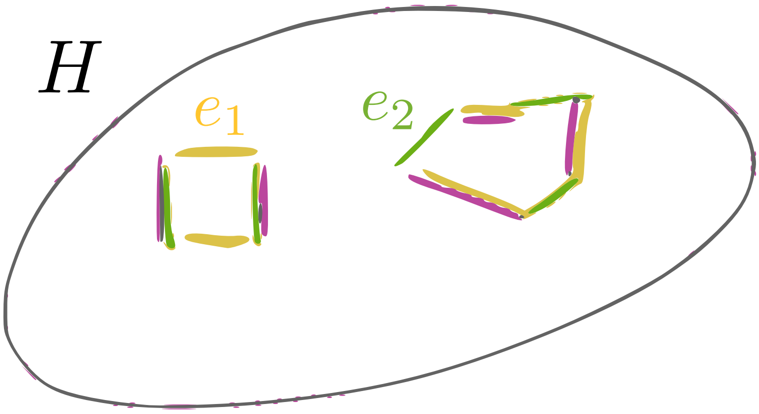
- jednoduchý případ: $e_1 \notin M_1 \Rightarrow M_1$ je PP pro G, analogicky pro e_2 a M_2

Těžší případ: $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2, H = (V, M_1 \cup M_2)$

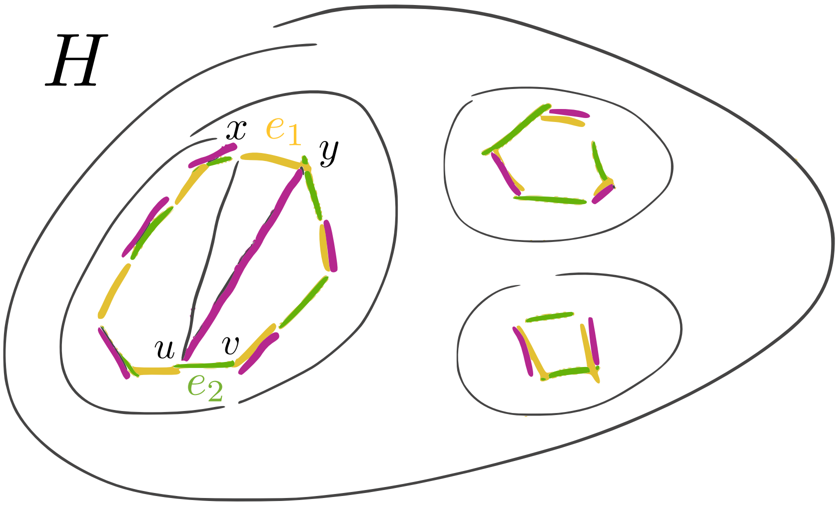
- H obsahuje **„dvoubarevné hrany“** $e \in M_1 \cap M_2$ nebo **střídavé sudé cykly**
- H neobsahuje **izolované vrcholy** a **střídavé cesty,** protože M_1, M_2 byly perfektní



- jednodušší případ těžšího případu: e_1 leží v jiné komponentě H než e_2 – stačí přealternovat hrany tak, aby ani e_1 ani e_2 v H neležely.



- složitější případ těžšího případu: e_1 a e_2 leží ve stejné komponentě – vybereme podle obrázku



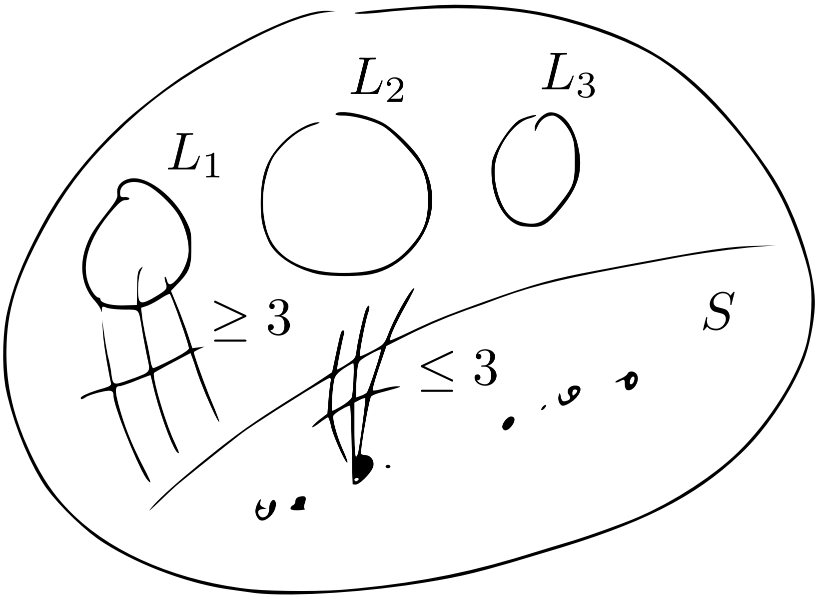
Věta (Petersen) každý 3-regulární 2-souvislý (vrcholově i hranově, pro 3-regulární grafy je to to samé; alternativně můžeme říct graf bez mostů a artikulací) graf má PP.

Důkaz: Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární a 2-souvislý. Chci ukázat, že G splňuje TP. Předpokládejme danou $S \subseteq V$.

1. každá komponenta $G - S$ je v G spojena aspoň dvěma hranami s S
   - je 2-souvislý, nemáme mosty
2. dokážeme, že každá lichá komponenta $G - S$ je s S spojena lichým počtem hran:
   - nechť L je lichá komponenta $G - S$; pak:

$$\sum_{x \in V(L)} \deg_G(x) \overset{3-\text{reg.}}{=} \underbrace{3|V(L)|}_{\text{liché číslo}} = \underbrace{2(\#\text{ hran vedoucích uvnitř } L)}_{\text{sudé číslo}} + \underbrace{1(\#\text{ hran vedoucích uvnitř } L)}_{\text{musí být liché}}$$

- kombinace (1) a (2) říká, že každá lichá komponenta $G - S$ je s S spojena ≥ 3 hranami:
  - $p =$ počet hran mezi S a lichými komponentami $G - S$
    * $p \geq 3 \cdot \text{odd(G} - \text{S)}$ (ukázali jsme výše)
    * $p \leq 3 \cdot |S|$ (každý vrchol S vysílá ven ≤ 3 hrany (z 3-regularity))



$|S| \geq \mathrm{odd}(G - S)$, tedy TP platí a graf má perfektní párování.

3. přednáška

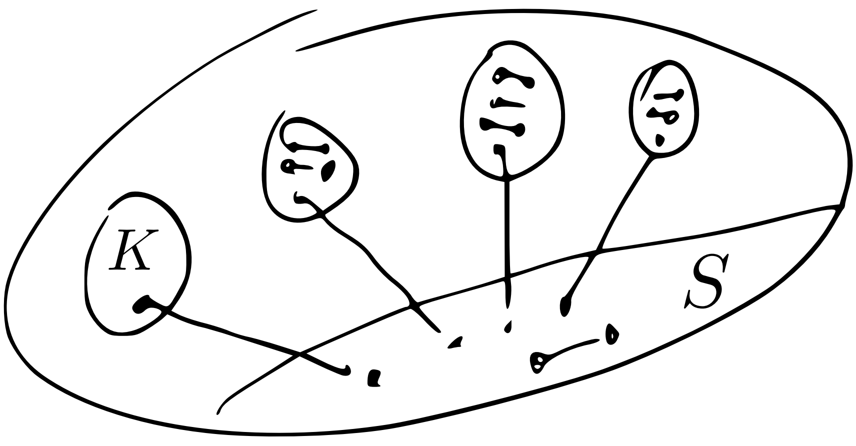
Tutte v2.0

Lemma (o kontrahovatelné hraně = LoKH) Nechť G je vrcholově 3-souvislý různý od K_4. Potom G obsahuje hranu t. ž. $G \setminus e$ je 3-souvislý.

Důkaz: Sporem – nechť G je 3-souvislý ale neexistuje žádná hrana, která jde zkontrahovat. Tedy $\forall e \in E : G \setminus e$ není 3-souvislý.

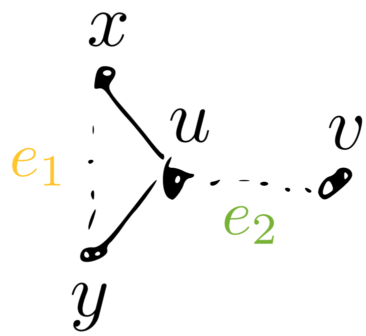
Lemma (pomocné) $\forall e = \{x, y\}\ \exists z_e \in V \setminus \{x, y\}$ t. ž. $\{x, y, z_e\}$ tvoří vrcholový řez v G, navíc každý z $\{x, y, z_e\}$ má alespoň jednoho souseda v každé komponentě $G \setminus \{x, y, z_e\}$.

- přesně popisuje situaci, že kontrakce libovolné hrany nám dá řez velikosti 2
- ve skutečnosti **neplatí** (ale dovětek ano) a dokazujeme ho pouze v rámci sporu!
- **(👀) (které platí)** S minimální vrcholový řez G, pak každý vrchol S má souseda v každé komponentě $G \setminus S$ – když to pro nějaký v neplatí, tak $S \setminus v$ je pořád řez



Důkaz (způsob z přednášky) Vím, že $G \setminus e$ není 3-souvislý, tedy má vrcholový řez velikosti 2. Nechť v_e je vrchol vzniklý kontrakcí $e = \{x, y\}$. Řez velikosti 2 obsahuje v_e, jinak by to byl řez už pro G (obsahoval by vrcholy z původního grafu, které nekontrahujeme).

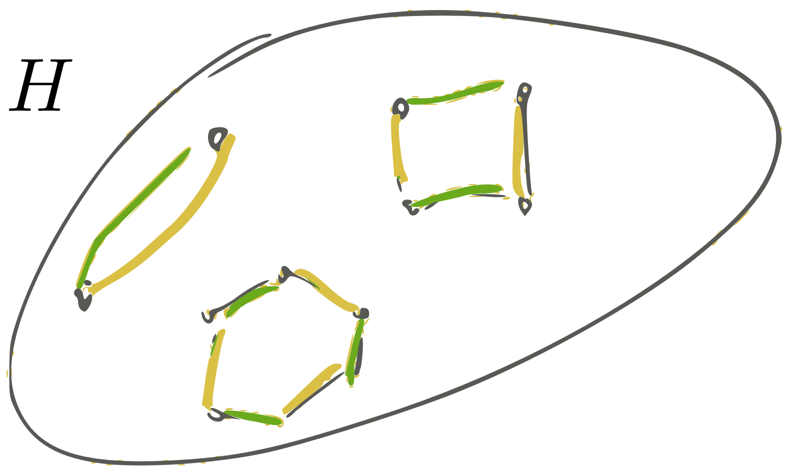
Označme řez v_e, z_e. Po rozkontrahování vidíme, že $\forall \{x, y, z_e\}$ musí mít souseda v každé komponentě (jinak spor s 3-souvislostí). Tedy z_e je hledaný vrchol.



Důkaz (moje intuice) Pokud by neplatilo (existovala by taková hrana), tak máme hranu, přes kterou kontrahujeme. Jelikož pro tu hranu platí, že neexistuje z, které spolu s jejími vrcholy tvoří řez, tak bude graf i po kontrakci 3-souvislý.

Pro důkaz původního lemmatu si zvolím $e = \{x, y\} \in E$ a z_e z pomocného tvrzení tak, aby nejmenší komponenta $G - z, y, z_e$ byla co nejmenší (co do počtu vrcholů).

Protože z_e má souseda ve všech komponentách, má nějakého souseda $u \in C, f = \{z_e, u\}$ (kde C je naše nejmenší komponenta). Pomocné tvrzení pro f dá nějaký $z_f \in V$ t. ž. $\{z_e, z_f, u\}$ je vrcholový řez G. Chceme dokázat, že $G - z_e, z_f, u$ má menší komponentu než C.



Nechť D je komponenta $G - z_e, z_f, u$ neobsahující x, y. Existuje, protože x, y jsou spojené a graf se rozpadne alespoň na 2 komponenty. Tvrdím, že $D \subseteq C \setminus \{u\}$, protože D nemůže obsahovat z_e, z_f, u (vrcholy řezu), x, y (z definice D), ale u má nějakého souseda v D (podle pomocného tvrzení, u má sousedy ve všech komponentách řezu), takže v D ještě něco zbyde. Navíc ho tam mělo u i předtím, takže opravdu $D \subsetneq C \setminus \{u\}$. Tedy $|D| < |C|$, což je spor s minimalitou.

- netvrdím, že D je nejmenší!

Věta (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů) Graf G je 3-souvislý $\iff$ existuje posloupnost $K_4 \cong G_0, G_1, \ldots, G_n \cong G$ t. ž. $\forall i \in [n], G_{i-1}$ vznikne z G_i kontrakcí hrany, navíc G_i má všechny vrcholy stupně ≥ 3.

Důkaz: $\Rightarrow$ Induktivní aplikace lemmatu o kontrahovatelné hraně.

$\Leftarrow$ Mějme $G_0, \ldots, G_n$ dle předpokladu. Chceme, že $G_n \cong G$ je 3-souvislý. Indukcí:

- K_4 je 3-souvislý
- G_{i-1} je 3-souvislý $\Rightarrow G_i$ je 3-souvislý

Obměnou nechť G_i má vrcholový řez velikosti 2, označme ho $R = \{x, y\}$. Pak každá komponenta $G_i - R$ má alespoň 2 vrcholy (osamocený vrchol z mohl sousedit jen s řezem, ale ten je velikosti 2, což je spor se stupněm vrcholů ≥ 3 pro v).

Pak ale G_{i-1} nebyl 3-souvislý, rozborem toho, kde vznikla hrana:

- $e = \{x, y\} \Rightarrow G_{i-1}$ má řez velikosti 1.
- e celá obsažená v komponentě $\Rightarrow \{x, y\}$ je stále řez v G_{i-1}
- $e = \{z, y\}$ pro z z nějaké komponenty $\Rightarrow \{zy, x\}$ je řez v G_{i-1}
  - využíváme předchozí pozorování, že každá komponenta má alespoň 2 vrcholy – kdyby ne, tak $\{zy, x\}$ nemusí nic odříznout, pokud tam byla jednovrcholová komponenta

Minory

Definice (minor) Nechť H, G jsou grafy. Pak H je minor G (nebo že G obsahuje H jako minor), značíme $H \preceq G$, pokud H lze získat z G posloupností mazání vrcholů, mazání hran nebo kontrakcí hran.

- **(👀):** $\preceq$ je transitivní (prostě spojím posloupnosti operací)
- **(👀):** H podgraf $G \Rightarrow H$ minor G
  - podgraf vzniká přesně mazáním vrcholů a mazáním hran
- **(👀) (spíš fakt)** G rovinný $\Rightarrow$ jeho minory jsou také rovinné
  - pro podgraf očividné, je jen potřeba si rozmyslet kontrakci (že nic topologicky nerozbije)

Věta (Kuratowského) G rovinný $\iff$ neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$

Věta (Kuratowski 1930, Warner 1937) Následující jsou ekvivalentní:

1. G je rovinný
2. G neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf
3. G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor.

Důkaz:

- *1 $\Rightarrow$ 2: z prváku, protože K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné
- 3 $\Rightarrow$ 2: obměna: „obsahuje dělení jako podgraf“ $\Rightarrow$ „obsahuje dělení jako minor“
- 1 $\Rightarrow$ 3: je-li rovinný, tak i minor bude rovinný (fakt výše)
- *2 $\Rightarrow$ 3: na přednášce nebyl, k přečtení tady[1]
- *3 $\Rightarrow$ 1: indukcí podle $|V(G)|$
  - pro $|V(G)| \leq 4$ vše funguje
  - předpokládám G má alespoň 5 vrcholů a neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor. Rozeberu případy podle $k_v(G)$ (vrcholová souvislost G)
    - $k_v(G) = 0 \Rightarrow$ nesouvislý graf, použijeme indukci
    - $k_v(G) = 1 \Rightarrow$ artikulačním vrcholem x rozpojíme, podle IP nakreslíme
      - x musí být na vnější stěně, což umíme přes trik s projekcí z koule na rovinu
    - $k_v(G) = 2 \Rightarrow$, rozložení podél dvou vrcholů tvořících řez, ale opatrně – musíme si rozmyslet, že můžeme obě části zkontrahovat do hrany mezi vrcholy, aby poté v nakreslení šly spojit

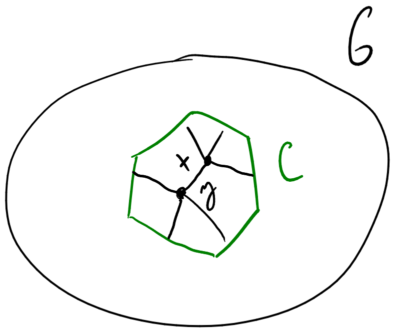
Pokračování v další přednášce…

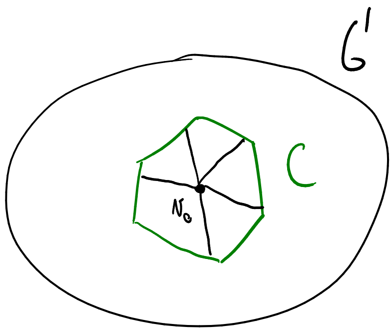
[1] Chceme ukázat, že obsahuje-li graf K_5 nebo $K_{3,3}$ jako minor, obsahuje i dělení nějakého z těchto grafů jako podgraf. Uvažme nejdřív obecně graf G obsahující jak podgraf dělení H' grafu H. H' dostaneme z G posloupností mazání vrcholů a mazání hran. H pak dostaneme z H' posloupností operací inverzních k dělení hran, což jsou právě kontrakce hran, při nichž má výsledný vrchol stejný stupeň, jako jeden z kontrahovaných vrcholů (a zároveň nekontrahujeme vrchol stupně 1, což je ale to samé jako mazání). Všimněme si, že tento speciální tvar má mimo jiné každá kontrakce, při níž nevznikne větší stupeň než 3. Co kdyby tedy G obsahoval minor K a navíc $\Delta(K) \leq 3$? Od G ke K se můžeme dostat posloupností mazání vrcholů, mazání hran a kontrakcí hran. Všimněme si ale, že nikdy nemusíme použít kontrakci, při které vznikne větší stupeň než 3, protože vzniklý vrchol musí být stejně následně smazán. To můžeme nahlédnout i tak, že v posloupnosti operací se mohou operace libovolně předbíhat (pokud je přitom patřičně pozměníme), a tedy všechny kontrakce si můžeme nechat nakonec. Z předchozích pozorování vidíme, že minory maximálního stupně nejvýše 3 a dělení jako podgrafy jsou generované stejnými typy operací a tedy speciálně obsahuje-li graf $K_{3,3}$ jako minor, obsahuje i nějaké jeho dělení jako podgraf. Zbytek důkazu pro K_5 je lepší s obrázkem a lze najít na tomhle odkazu (Lemma 4.4.2).

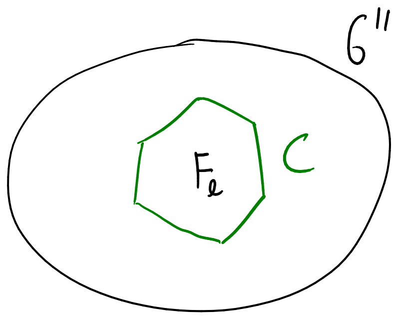
4. přednáška

- $k_v(G) \geq 3 \Rightarrow$ použijeme lemma o kontrahovatelné hraně: $\exists e = \{x, y\}$ t. ž. $G \setminus e = G'$ je 3-souvislý
  - **(👀):** G' nemůže obsahovat K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor (kontrakcí něčeho, co je nemělo, je nevytvoříme)
  - $\mathcal{G}' \ldots$ rovinné nakreslení G' (existuje z IP)
  - $G'' = G' - v_e$ (vrchol vzniklý kontrakcí e) $= G - \{x, y\}$
    - **(👀):** G'' bude 2-souvislý (protože G' je 3-souvislý a G'' vznikne odebráním vrcholu)
    - **(👀):** taky rovinný (odebráním mi žádný minor nevznikne)
    - $\mathcal{G}''$ nakreslení G'' vzniklé z $\mathcal{G}'$ odebráním v_e

Označme C kružnici ohraničující stěnu $\mathcal{G}''$, v níž ležel (v $\mathcal{G}'$ vrchol v_e) – musí to být kružnice, protože v rovinném nakreslení každého 2-souvislého grafu je každá stěna kružnice.



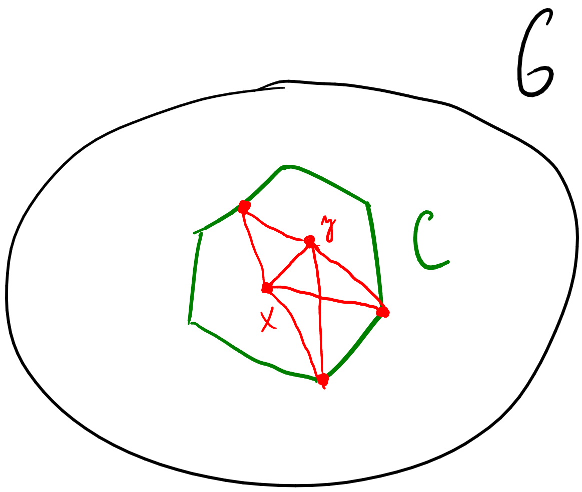




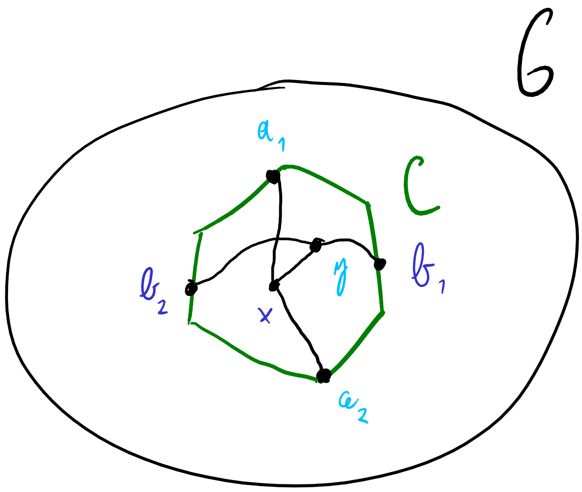
- $N(x)$ – sousedi x
- $N(y)$ – sousedi y
- $N(x) \cup N(y) \setminus \{x, y\} \subseteq C$ (každý soused x kromě y je i sousedem v_e v G', stejně pro y

3 případy:

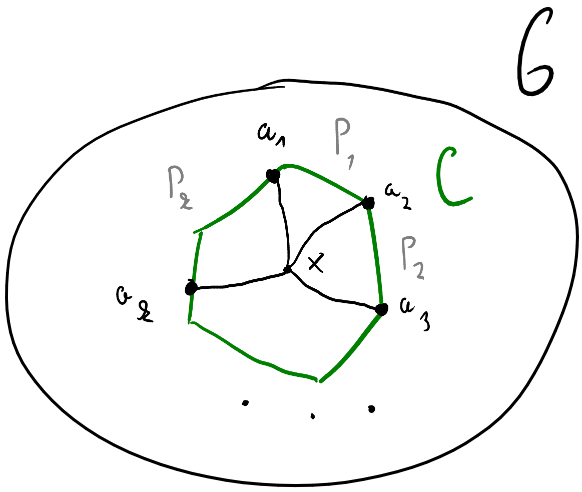
- $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$ – nenastane, protože kontrakcí dostanu K_5, což je spor s předpokladem

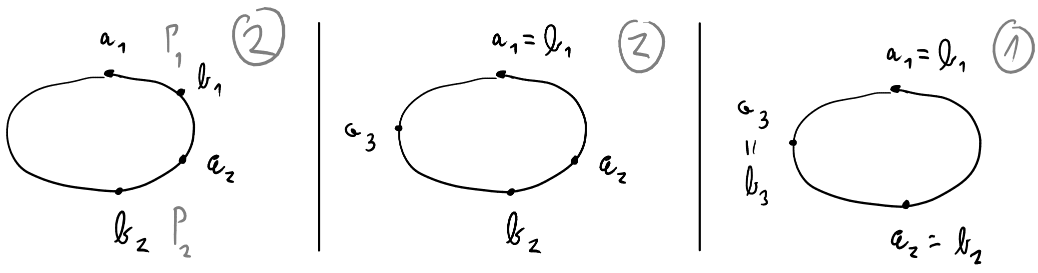


- $\exists a_1, a_2 \in N(x) \cap C, \exists b_1, b_2 \in N(y) \cap C$, na C jsou v pořadí a_1, b_1, a_2, b_2 – nenastane, protože kontrakcí dostanu $K_{3,3}$



- zbytek – nenasatane ani (1), ani (2)
  - označme $a_1, \ldots, a_k \in N(x) \cap C$ v pořadí, jak se objevují na C
  - můžu nakreslit všechny hrany $xa_1, \ldots xa_k$
  - $a_1, \ldots, a_k$ rozdělují C na vnitřně disjunktní cesty $P_1, \ldots P_k$ ($k \geq 2$ protože G je 3-souvislý... x sousedí s y a s ≥ 2 dalšími vrcholy)
    - chceme: $N(y) \setminus \{x\}$ patří do jediné P_i (pro nějaké i), jinak by nastaly předchozí případy
  - y nakreslím do té správně stěny, spojím s b_i a mám hotovo





Kreslení grafů na plochy

Definice: Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Potom homeomorfismus z X na Y je funkce $f : X \mapsto Y$, která je spojitá, bijekce a f^{-1} je spojitá. X, Y jsou homeomorfní ($X \cong Y$) pokud mezi nimi existuje homeomorfismus.

- něco jako isomorfismus u grafů ($X \cong Y$ znamená, že se chovají stejně)

Definice (plocha) kompaktní (uzavřená, omezená), souvislá (např. oblouková – každé dva body můžu propojit obloukem), 2-rozměrná varieta bez hranice (dostatečně malé okolí každého bodu je homeomorfní otevřenému okolí v $\mathbb{R}^2$).

- např. sféra v $\mathbb{R}^3$ nebo torus v $\mathbb{R}^3$
- není to např.
  - $\mathbb{R}^2$, jelikož není kompaktní (omezená)
  - čtverec s hranici, jelikož pro každý krajní body není homeomorfní $\mathbb{R}^2$

Operace s plochami, přes které umíme všechny zkonstruovat:

- přidání ucha (od hrnku)
  - vyříznu dva kruhy
  - vezmu plášť pálce bez dna a vrchu
  - ohnu a přilepím jej na díry po kruzích
  - **(👀):** teleport, do kterého když vejdeme, tak na druhé straně vyjdeme opačně („otočeně“)
- přidání křížítka (cross-cupu):
  - **(👀):** teleport, do kterého když vejdeme, tak nás to přesune naproti

Pro $g \in \{0, 1, \ldots\}$ nechť $\sum_g$ značí plochu zvniklou ze sféry přidáním g uší, tak říkáme, že $\sum g$ je **orientovatelná plocha** rodu g.

Pro $g \in \{1, 2, \ldots\}$ nechť $\prod_g$ značí plochu zvniklou ze sféry přidáním g křížítek, tak říkáme, že $\prod g$ je **neorientovatelná plocha** rodu g.

Fakt: Každá plocha je homeomorfní právě jedné z posloupností $\sum_0, \prod_1, \sum_1, \prod_2, \ldots$

- máme tu skryté tvrzení, že žádné dvě z této posloupností nejsou homeomorfní.

Fakt: Přidám-li ke sféře $(= \Sigma_0)$ $k \geq 0$ uší a $l \geq 1$ křížítek, vznikne **neorientovatelná plocha** homeomorfní $\prod_{2k+l}$ ($\approx$ „přidání dvou křížítek je jako přidání ucha,“ **pokud** už tam bylo ≥ 1 křížítko)

- $\sum_0 \ldots$ sféra
- $\prod_1 \ldots$ projektivní rovina
- $\sum_1 \ldots$ torus
- $\prod_2 \ldots$ kleinova láhev

5. přednáška

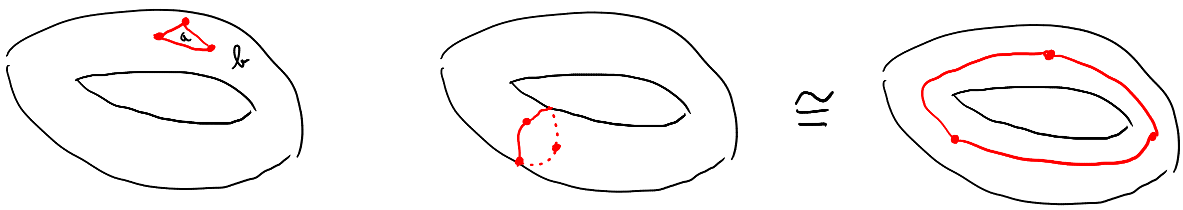
Definice (nakreslení grafu) $G = (V, E)$ na plochu Γ je zobrazení φ t. ž.:

- každému vrcholu $v \in V$ přiřadí bod $\varphi(v) \in \Gamma$
- každé hraně $e \in E$ přiřadí prostou (neprotínající se) křivku $\varphi(e) \in \Gamma$ spojující konce $\varphi(x), \varphi(y)$
- vrcholy se nepřekrývají: $x, y \in V : x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$
- hrany se překrývají nejvýše ve sdílených vrcholech: $e, f \in E : e \neq f \Rightarrow \varphi(e) \cap \varphi(f) = \{\varphi(x) \mid x \in e \cap f\}$
- vrcholy, které neleží na hraně se s ní neprotínají: $e \in E, x \in V : x \notin e \Rightarrow \varphi(x) \notin \varphi(e)$

Definice (stěna nakreslení) souvislá komponenta $\Gamma \setminus \left(\left(\bigcup_{e \in E}^{\varphi(e)}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in V}^{\varphi(x)}\right)\right)$

- prostě souvislé komponenty toho, když odeberu všechna nakreslení hran a vrcholů

Definice (buňkové nakreslení) každá stěna je homeomorfní otevřenému kruhu v $\mathbb{R}^2$.



2 stěny, není buňkové 1 stěna, [illegible] není buňkové

Připomenutí: $G = (V, E)$ souvislý $\Rightarrow$ v každém rovinném nakreslení platí $|V| - |E| + S = 2$

- využíváme faktu, že rovinné nakreslení G je buňkové $\iff$ G je souvislé
- 2 je speciální pro rovinu

Definice (Eulerova charakteristika plochy) charakteristika plochy Γ je

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(\Gamma) &= \begin{cases} 2 - g & \Gamma \cong \prod(g \geq 1) \\ 2 - 2g & \Gamma \cong \sum(g \geq 0) \end{cases} \\
&= 2 - \#\text{ křížítek} - 2 \cdot \#\text{ uší}
\end{aligned}$$

Věta (zobecněná Eulerova formule) Nechť máme nakreslení grafu $G = (V, E)$ na ploše Γ, které má S stěn. Pak $|V| - |E| + |S| \geq \mathrm{X}(\Gamma)$. Pokud je buňkové, tak dokonce $|V| - |E| + |S| = \mathrm{X}(\Gamma)$.

Důkaz (rovnosti) idea je indukce podle rodu Γ

- $\Gamma \cong \Sigma_0$ platí

Mějme buňkové nakreslení $G = (V, E)$ na $\Gamma \cong \Pi_g$

- pro $\Gamma \cong \Sigma_g$ se dělá analogicky, jen trháme obě ucha a vyjde to
- $v(G), e(G), s(G)$ značíme počet vrcholů, hran a stěn

Nechť K je křížítko na Γ, $x_1, \ldots, x_k$ jsou body K (ne nutně vrcholy grafu), kde hrany G kříží K

- **(👀):** $k \geq 1$, jinak by stěna obsahující K nebyla buňka
- rovněž předpokládám, že vrchol neleží přesně na křížítku, jinak bych ho mohl BUNO posunout

Vytvoříme G' přidáním dvou dělících vrcholů na každou hranu křížící K těsně vedle $x_1, \ldots, x_k$ („před a za křížítkem“). Děláme to proto, že jedna hrana by mohla procházet křížítkem na více místech a bylo by to pak dost rozbitý.

- $v(G') = v(G) + 2k$
- $e(G') = e(G) + 2k$
- $s(G') = s(G)$
- tedy: $L(G') = L(G)$ (kde L je levá strana)

Vytvoříme G'' přidaním cest délky 2 k sousedním vrcholům z předchozího kroku. Vznikne tím kružnice C obcházející K.

- $v(G'') = v(G') + 2k$
- $e(G'') = e(G') + 4k$
- $s(G'') = s(G') + 2k$ (každou z k stěn dělím na 3 kusy)
- tedy: $L(G'') = L(G')$

Vytvoříme G''' odebráním všeho uvnitř C.

- $v(G''') = v(G'')$
- $e(G''') = e(G'') - k$ (k křížících-se hran uvnitř C)
- $s(G''') = s(G'') - k + 1$ („spojím“ k stěn do jedné)
- tedy: $L(G''') = L(G'') + 1$

$$\begin{aligned}
L(G''') = \mathrm{X}(\Pi_{g-1}) = \mathrm{X}(\Gamma) + 1 \qquad &| \text{ dle IP} \\
L(G''') - 1 = L(G'') = L(G') = L(G) \qquad &| \text{ z výpočtu}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{X}(\Gamma) = L(G)$$

Důsledek: Každý graf G nakreslitelný na plochu Γ splní $|E| \leq 3|V| - 3\mathrm{X}(\Gamma)$, pokud $|V| \geq 4$

- důkaz přes to, že předpokládáme, že každá stěna je trojúhelník a dosadíme $|S| = \frac{2}{3}|E|$, jelikož každá stěna je tvořena třemi hranami a zároveň je každá hrana ve dvou stěnách
- každý takový graf má průměrný stupeň $\frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\mathrm{X}(\Gamma)}{|V|}$
  - na žádnou zafixovanou plochu nelze nakreslit libovolně velký 7-regulární graf

  - pro libovolně velký úplňák dokážeme vytvořit plochu, na kterou ho nakreslíme

Tvrzení: Nechť Γ je plocha, $\Gamma \neq \Sigma_0$, nechť G je graf nakreslený na Γ, potom G obsahuje vrchol stupně $\leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\mathrm{X}(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$

Důkaz: Mějme G podle předpokladu. Opět značíme $v(G), e(G)$ jako počet vrcholů a hran. Rozlišíme 3 případy:

- $\mathrm{X}(\Gamma) = 1$ (t.j. $\Gamma \cong \prod_1$), dosazením do předchozího důsledku dostáváme průměrný stupeň < 6, tedy existuje vrchol stupně ≤ 5, což jsme chtěli
- $\mathrm{X}(\Gamma) = 0$ (t.j. $\Gamma \cong \prod_2$ nebo $\Gamma \cong \sum_1$), průměrný stupeň $\leq 6 \Rightarrow \exists$ vrchol stupně ≤ 6
- $\mathrm{X}(\Gamma) < 0 \ldots \delta(G) =$ min. stupeň G; víme:
  - $\delta(G) \leq 6 - \frac{6\mathrm{X}(\Gamma)}{v(G)}$
  - $\delta(G) \leq v(G) - 1$ (žádný vrchol nemá víc než $v(G) - 1$ sousedů)
  - chceme zjistit max. hodnotu δ, což je řešení dvou rovnic výše; dosazením a vyřešením kvadratické rovnice vyjde přesně výraz, který dokazujeme

Důsledek (Heawoodova formule, 1890) Pokud $\Gamma \ncong \sum_0$, tak každý graf nakreslitelny na Γ je nejvýš $H(\Gamma) = 1 + \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\mathrm{X}(\Gamma)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\mathrm{X}(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$-obarvitelný

- vyplývá z předchozího důsledku – pokud má graf stupeň nejvýše δ, tak je $\delta + 1$-obarvitelný
- platí i pro stéru: věta o 4-barvách
- tento odhad je těsný pro všechny plochy kromě $\prod_2$
- na každou plochu $\Gamma \ncong \prod_2$ lze kreslit kliku velikosti $H(\Gamma)$
  - (každý graf nakreslitelný na $\prod_2$ je dokonce 6-obarvitelný)

6. přednáška

Vrcholové barvení

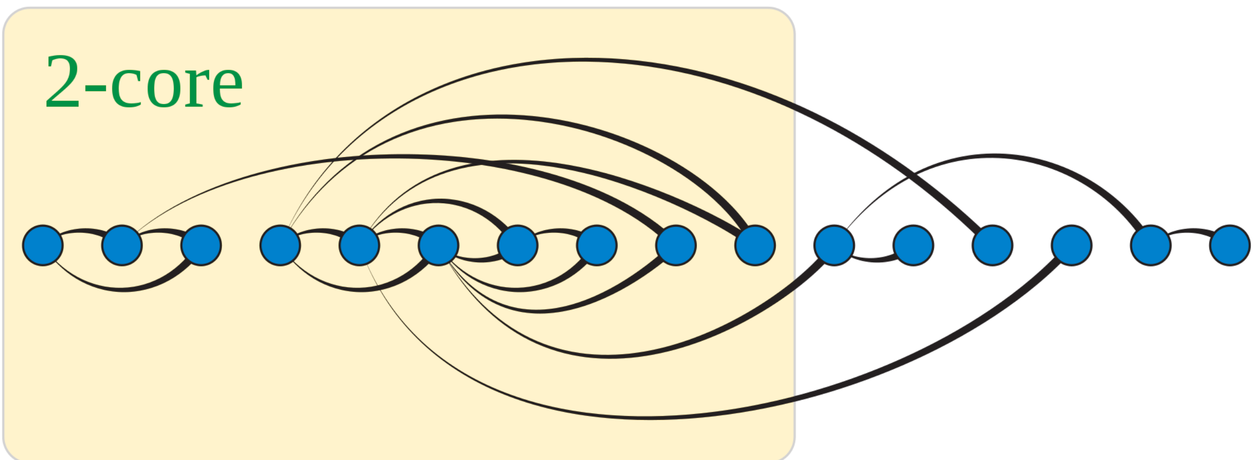
- $\mathrm{X}(G) =$ barevnost $G =$ nejmenší počet barev, kterými lze (dobře) obarvit vrcholy G
- $\Delta(G) =$ max. stupeň $G =$, $\delta(G) =$ min. stupeň G

Definice: G je d-degenerovaný $\equiv$ každý podgraf H grafu G má $\delta(H) \leq d$

- $=$ každý podgraf má vrchol stupně nejvýše d

Definice (eliminační pořadí) Alternativní definice d-degenerovanosti: graf je d-degenerovaný $\iff \exists$ pořadí vrcholů (eliminační) $v_1, \ldots v_n$ t. ž. $\forall i : G_i := G - \{v_1, \ldots, v_i\} : \delta(G_i) \leq d$ a v_{i-1} má $\leq d$ sousedů v G_i

- trháme vrcholy – každý další odebraný má nejvýše d sousedů a graf je stále d-degenerovaný
- **(👀):** G je d-degenerovaný $\Rightarrow \mathrm{X}(G) \leq d + 1$ (barvím indukcí v pořadí $v_n, \ldots, v_1$)



- z minule: pokud G je nakreslitelný na $\Gamma \Rightarrow G$ má vrchol stupně nejvýše $H(\Gamma) - 1$ a $G - v$ je stále nakreslitelný na $\Gamma \Rightarrow G$ je $(H(\Gamma) - 1)$-degenerovaný $\Rightarrow$ je $H(\Gamma)$ obarvitelný

(👀): G je $\Delta(G)$-degenerovaný (triviálně) $\Rightarrow \mathrm{X}(G) \leq \Delta(G)+1$ (z pozorování výše)

- s rovností platí např. pro úplné grafy a liché cykly

Lemma: G souvislý graf a $\delta(G) < \Delta(G)$, pak $\mathrm{X}(G) \leq \Delta(G)$

- když nás zajímá předchozí otázka, tak se stačí zaměřit na nějaký regulární graf

Důkaz: Tvrdím, že G je $(\Delta(G)-1)$-degenerovaný. Volme H neprázdný podgraf G a dokazujeme, že v H existuje v stupně $\leq \Delta(G)-1$

- pokud H obsahuje všechny vrcholy $\Rightarrow$ předpoklad
- jinak $\exists e = \{x, y\} \in G$ t. ž. $x \in H$ a $y \notin H$
  - $\deg_H(x) \leq \deg_G(x) - 1 \leq \Delta(G) - 1$

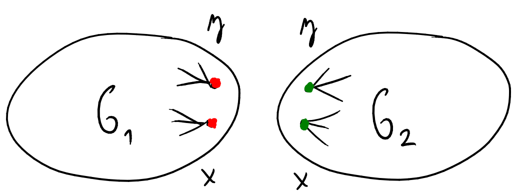
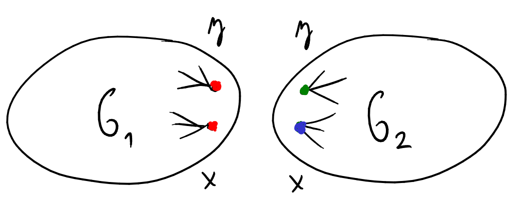
Věta (Brooks, 1941) Nechť G je souvislý graf který není úplný a není lichá kružnice. Pak

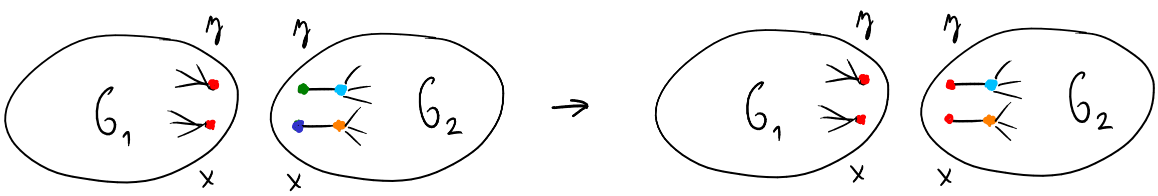
$$\mathrm{X}(G) \leq \Delta(G)$$

Důkaz: nechť $\mathrm{X} = \mathrm{X}(G), \Delta = \Delta(G)$ a navíc předpokládám, že G je Δ-regulární (jinak viz. předchozí lemma.

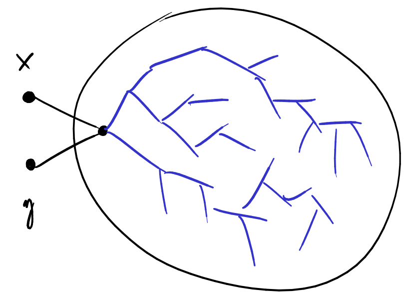
- $\Delta = 1$
  - K_2: zakázané
- $\Delta = 2$
  - C_{2k}: $\mathrm{X} = 2$
  - C_{2k+1}: zakázané
- $\Delta \geq 3$; označme $k_V(G)$ = vrcholová souvislost G a opět rozebereme případy

1. $k_V(G) = 1$
   - máme artikulaci, vrchol artikulace v měl souseda v obou částech grafu, proto $\deg_{G_1}(v), \deg_{G_2}(V) < \Delta$
   - podle lemmatu (G_1 a G_2 nejsou regulární) lze G_1 i G_2 Δ-obarvit a stačí přepermutovat barvy, aby měl v obou obarveních stejnou
2. $k_V(G) = 2$
   - dobré případy (lze slepit)
     - $b_1(x) = b_1(y)$ a $b_2(x) = b_2(y)$
     - $b_1(x) \neq b_1(y)$ a $b_2(x) \neq b_2(y)$
   - těžší případ – na jedné straně stejné, na druhé různé
     - $b_1(x) = b_1(y)$ a $b_2(x) \neq b_2(y)$
       - ∗ pokud $\deg_{G_1}(x)$ nebo $\deg_{G_1}(y) \leq \Delta - 2$, tak po přidání hrany půjde použít lemma a vrcholy budou mít různou barvu a máme dobrý případ
         - · nemůže se stát, že by např. druhý měl $\deg_{G_1} = \Delta$, protože musí vidět i do druhé komponenty
       - ∗ nebo $\deg_{G_1}(x) = \deg_{G_1}(y) = \Delta - 1$
         - · pak musí $\deg_{G_2}(x) = \deg_{G_2}(y) = 1$ (stupeň je celkově Δ)
         - · z předpokladu máme k použití alespoň 3 barvy, přebarvím jimi x a y a máme dobrý případ



{:start="3"} 3. $k_V(G) \geq 3$ – použiji lemma o třešničce (souvislý graf, který není klika, obsahuje třešničku) - seřadím vrcholy jako $v_1 = x, v_2 = y, \ldots, v_n = z$ tak, aby $\forall v_i : 3 \leq i \leq n-1$ měl alespoň jednoho souseda napravo a barvím (hladově): - umíme získat jako BFS vrstvy od z, kromě x a y - 3-souvislost využívám k tomu, že i po odstranění x a y graf bude stále nějakou kostru mít a bude tedy stále souvislý - $b(x) = b(y) = 1$ - $b(v_3) \ldots$ má ≥ 1 neobarveného souseda $\Rightarrow$ je nějaká nepoužitá z Δ barev - ... - $b(v_n) \ldots$ všichni sousedé už obarvení, ale dva sousedé (x, y) mají stejnou barvu, tedy z vidí $\leq \Delta - 1$ barev a jedna je volná



Pár poznámek

Hadwigerova domněnka: $K_t \not\leq_m G$ (není minor)$\Rightarrow \chi(G) < t$

- $t = 4 \ldots$ relativně jednoduché
- $t = 5 \ldots$ zobecnění věty o 4 barvách
- $t = 6 \ldots$ pomocí věty o 4 barvách + hodně práce
- $t \geq 7 \ldots$ neví se

Tvrzení: G nakreslitelný na Kleinovu láhev $\Rightarrow$ G je 6-obarvitelný.

Důkaz: Z Eulerovy formule plyne, že platí jedno z následujících:

- $\delta(G) \leq 5 \Rightarrow \exists v : \deg(v) \leq 5$
  - $G - v \ldots$ obarvím z indukce, přidám v a mám volnou barvu
- G je 6-regulární:
  - $G \cong K_7$ – nesmí, protože nejde nakreslit (je potřeba si rozmyslet)
  - $G \ncong K_7$ – přímo Brooksova věta

Hranové obarvení

Definice: $b : E \mapsto B$ (barvy) t. ž. $\forall e \neq f \in E, e \cap f \neq \emptyset \Rightarrow b(e) \neq b(f)$. Hranová barevnost G ("chromatic index") $\chi'(G)$ je min. počet barev pro hranové barvení G.

7. přednáška

Věta (Vizing, 1964) Pro každý graf G platí, že $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

- grafy Vizingovy třídy 1 jsou grafy $\chi'(G) = \Delta(G)$, třídy 2 jsou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$
- je NP-úplné rozhodnout, zda daný graf G má VIzingovu třídu 1 (i pro grafy s $\Delta(G) = 3$)
- důkaz jsem zpracoval do YouTube videa

Perfektní grafy

Věta (Slabá věta o perfektních grafech, 1972) G je perfektní $\iff$ $\bar{G}$ je perfektní.

- důkaz jsem zpracoval do YouTube videa

8. přednáška

Chordální grafy

Definice (chordální graf) Graf je chordální, pokud neobsahuje $C_k, k \geq 4$ jako in. podgraf.

- alternativní pohled vycházející ze jména: každá kružnice má *chordu* (tětivu)

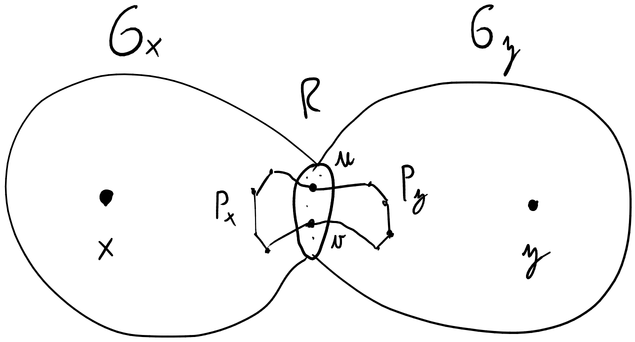
Definice: Nechť x, y dva nesousední vrcholy G. R je x-y-řez, pokud je to řez takový, že x, y patří do různých komponent $G \setminus R$.

Tvrzení: G je chordální $\iff$ pro každé dva nesousední vrcholy $x, y \in V, x \neq y$ existuje x-y-řez, který je klika.

Důkaz: $\Leftarrow$ nechť G není chordální, tedy obsahuje indukovanou kružnici C_4. Uvážíme-li dva její nesousední vrcholy, tak jakýkoliv řez musí obsahovat vrcholy z horní a dolní cesty mezi x a y. Ty nesousedí, tedy řez nebude klika.

$\Rightarrow$ nechť G je chordální, x, y nesousední. Nechť R je x-y-řez s co nejméně vrcholy. Tvrdím, že R tvoří kliku.

Pro spor: R není klika $\Rightarrow$ obsahuje u, v nesousedy. Protože R je nejmenší, má u i v sousedy na obou stranách. Jelikož jsou to komponenty souvislosti, tak tam bude existovat cesta. Vezmu nejkratší cesty P_x, P_y v komponentách G_x, G_y. Vrcholy P_x, P_y nesousedí (jinak by R nebyl řez), $P_x - u - P_y - v$ tvoří indukovaný cyklus.



Definice: Vrchol x je v grafu G simpliciální, pokud jeho sousedství $N_G(x)$ tvoří kliku G.

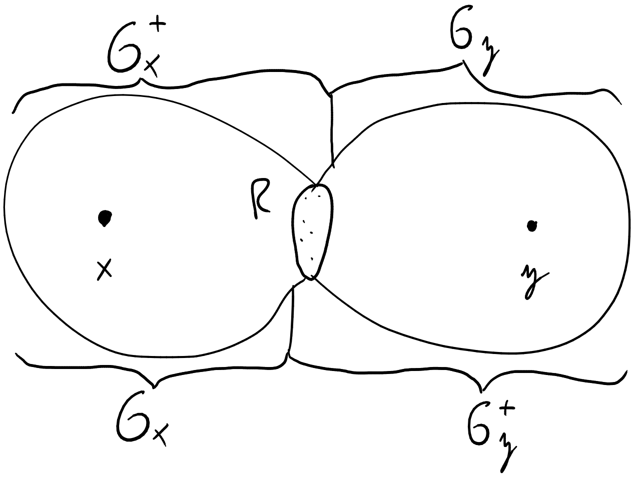
Věta: Každý chordální graf (kromě prázdného) obsahuje simpliciální vrchol.

- dokážeme pomocí silnějšího tvrzení

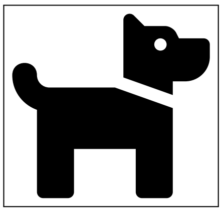
Věta: Každý chordální graf je buď úplný, nebo obsahuje dva nesousední simpliciální vrcholy.

Důkaz: indukcí podle $|V(G)|$

- základ: $|V(G)| = 1$ platí
- pro více vrcholů
  - G je úplný, platí
  - nebo nechť x, y nesousedi v G a R je x-y-řez tvořící kliku
    - $G_x^+ =$ (komponenta $G \setminus R$ obsahující x) $\cup R$, obdobně G_y^+
    - **(👀):** pokud G byl chordální, pak $H \leq G$ je také chordalní
    - použijeme IP na G_x^+
      - pokud G_x^+ klika, vezmi jako s_x libovolný vrchol G_x (např. x)
      - pokud G_x^+ není klika, má dva simpliciální vrcholy; nejvýše jeden může ležet v R, jelikož je to klika a za s_x zvolím ten druhý; analogicky pro G_y^+
      - **(👀):** jelikož R je řez, tak se sousedství nezmění: $N_{G_x^+}(s_x) = N_G(s_x)$ (proto vlastně děláme indukci přes G_x^+, né jen přes G_x



Definice (PES) Perfektní eliminační schéma (PES) grafu G je pořadí vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ t. ž. $\forall i \in [n]$ platí, že leví sousedé v_i ($= \{v_j \mid j < i, v_j v_i \in E\}$) tvoří kliku.



Věta: G je chordální $\iff$ G má PES.

Důkaz: $\Leftarrow$ obměnou nechť G není chordální a má tedy indukovanou kružnici velikosti alespoň 4. Pro spor nechť máme PES. Nejlevější vrchol špatné kružnice v PES nemá souseda na této kružnici, což je spor s definicí PES.

$\Rightarrow$ nechť G je chordální. Má tedy simpliciální vrchol v_n. Jeho sousedé tvoří kliku a $G - v_n$ je opět chordální (indukovaný graf chordálního je opět chordální) a opakujeme, čímž vznikne PES pro G.

Důsledek: pro daný graf G lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je chordální.

Důkaz: Trháme simpliciální vrcholy, které chordální graf musí vždy mít – ty umíme v polynomiálním čase najít otestováním všech sousedů. Pokud simpliciální vrchol v nějakém bodě nenajdeme, tak graf chordální být nemohl.

Důsledek: chordální grafy jsou perfektní.

Důkaz: Je-li graf G chordální, pak má PES, pomocí kterého ho umíme obarvit tak, aby měl nejvýše $\omega(G)$. Jelikož je navíc každý indukovaný podgraf chordálního grafu také chordální, tak platí i pro indukované podgrafy, což potřebujeme pro perfektnost.

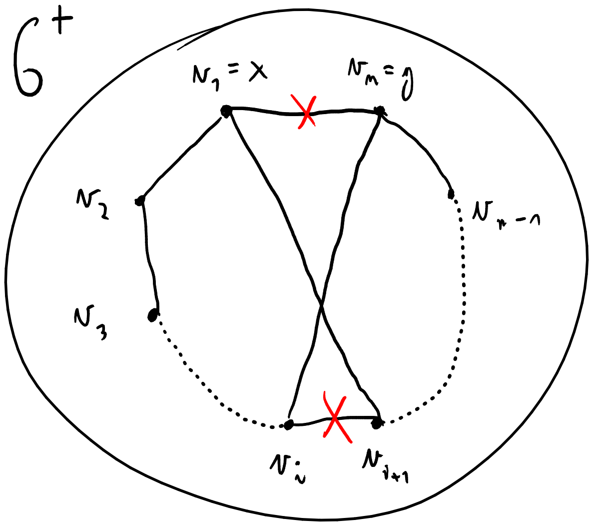
Definice: G je hamiltonovský, pokud má kružnici na n vrcholech (jako podgraf).

Věta (Bondyho-Chvátalova) Nechť G je graf na $n \geq 3$ vrcholech. Nechť x, y jsou nesousedé t. ž. $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$. Nechť $G^+ = (V, E \cup \{xy\})$. Pak G je hamiltonovský $\iff$ G^+ je hamiltonovský.

Důkaz: $\Rightarrow$ jasné

$\Leftarrow$ nechť C je hamiltonovská kružnice G^+ a x, y vrcholy splňující podmínku.

- pokud C neobsahuje xy, pak C je hamiltonovská kružnice G
- jinak $v_1, \ldots, v_n$ očíslujeme vrcholy C a navíc $v_1 = x, v_n = y$
  - chceme $C' := (C \setminus \{xy, v_i v_{i+1}\}) \cup \{v_i y, v_{i+1} x\}$ je ham. kružnice v G
  - $I_1 := \{i \in \{2, \ldots, n-2\}$ t. ž. $\{x, v_{i+1}\} \in E\}$ (vrcholy dobré pro x)
    * povoluji vrcholy $v_3, \ldots, v_{n-1}$, viz. indexování
  - $I_2 := \{i \in \{2, \ldots, n-2\}$ t. ž. $\{y, v_i\} \in E\}$ (vrcholy dobré pro y)
    * povoluji vrcholy $v_2, \ldots, v_{n-2}$, viz. indexování
  - $|I_1 \cup I_2| \leq n - 3$ (pozor, indexování je posunuté!
  - $|I_1| = \deg_G(x) - 1$ (nesmím použít v_2)
  - $|I_2| = \deg_G(y) - 1$ (nesmím použít v_{n-1})
  - $|I_1| + |I_2| = \deg_G(x) - 1 + \deg_G(y) - 1 \geq n - 2$ (z předpokladu)
  - $|I_1 \cup I_2| \leq 3$ ale $|I_1 + I_2| \geq n - 2$ znamená, že se překrývají



Věta (Dirac) G graf na $n \geq 3$ vrcholech s min. stupněm $\geq n/2$ je hamiltonovský.

Důkaz: Z Bondy-Chvátalovy věty doplníme na K_n, který je hamiltonovský.

9. přednáška

Tutteův polynom

Definice (multigraf) $G = (V, E)$ kde V jsou vrcholy a E multimnožina prvků z $V \cup \binom{V}{2}$

- odstranění a kontrakce fungují intuitivně – kontrakce nezahazuje hrany, protože máme multigraf

Definice (most) hrana $e \in E$ je most, v multigrafu G, pokud $G - e$ má více komponent než G

- $k(G) = k(V, E) =$ počet komponent

Definice (hodnost/rank) E je $r(E) := |V| - k(G)$

- intuice: $\sim$ velikost největší „neredundantní“ podmnožiny $F \subseteq E$ (t. ž. $k(G) = k(F)$)

Důkaz: Chceme dokázat, že F neobsahuje cykly a že $r(E) = r(F)$. Víme, že $k(G) = k(F)$.

Postupné přidávání hran z F (právě tohle zaručuje, že nemáme cykly):

- snižuje počet komponent, vždy o 1, tedy $k(F) = |V| - |F|$
- zvyšuje rank vždy o 1 (nastává druhý případ z tabulky dole), tedy $r(F) = |F|$

Spojením dostáváme $r(F) = |F| = |V| - k(F) = |V| - k(G) = r(E)$.

Důkaz (alternativní) Pokud je rank $|V| - 1$, tak je graf souvislý a přesně to odpovídá počtu hran jeho kostry. Pokud má 2 komponenty souvislosti, tak bude mít $|V| - 2$ hran, protože jednu hranu z kostry odebereme a graf tím roztrhneme. Pro více komponent souvislosti opakujeme a tedy $r(E) = |V| - k(G)$

Definice (nulita) E je $n(E) := |E| - r(E)$

- intuice: velikost největší „redundantní“ podmnožiny $F \subseteq E$ (t. ž. počet komponent se nezmění po jejím odebrání) – to dává smysl, jelikož je to $|E| - r(E)$ a jelikož rank udává počet těch užitečných, tak nulita těch neužitečných

Příklad: $G = (V, E)$

změna	$r(E)$	$n(E)$
přidání hrany bez změny počtu komponent	$r(E)$	$n(E) + 1$
přidání hrany se změnou počtu komponent	$r(E) + 1$	$n(E)$

- odpovídá intuici – hrana, která se přidala ale nezměnila souvislost (byla tedy zbytečná), zvýší nulitu, kdežto užitečná hrana zvýší rank

Definice (Tutteův polynom) multigrafu $G = (V, E)$ je polynom proměnných x, y definovaný jako

$$T_G(x, y) := \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}$$

Tvrzení: pro G souvislý je $T_G(1, 1)$ počet koster G

Důkaz: Dosadím do polynomu a získám $0^{r(E)-r(F)} 0^{n(F)}$. Vím, že $x^0 \equiv 1$, tedy výraz bude počet F takových, že $r(E) = r(F)$ a $n(F) = 0$.

- z předpokladu souvislosti je počet komponent 1
  - F musí mít také pouze 1, protože $r(E) = r(F)$
- $n(F) = 0$ znamená, že $0 = |F| - |V| - 1$, tedy $|F| = |V| - 1$
- kombinace počtu hran a souvislosti dává, že je to strom a tedy kostra

Tvrzení: Nechť $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, G_2)$ jsou multigrafy, t. ž. $|V_1 \cap V_2| \leq 1$, $|E_1 \cap E_2| = 0$ (protínají se nejvýše v jednom vrcholu a v žádné hraně). Definujeme $G = (V, E)$, kde $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$. Potom $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)$

Důkaz: V definici kvantifikuji přes podmnožiny hran. Ty ale můžu vždy rozdělit na disjunktní sjednocení podle E_1 a E_2. Navíc:

- $r(F) = r(F_1) + r(F_2)$ (z pohledu jako největší neredundantní množina hran)
- $n(F) = n(F_1) + n(F_2)$ (analogicky, opět z intuice)

Pak rozepíšu:

$$\begin{aligned}
T_G(x, y) &= \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} \\
&= \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_1 \cup E_2) - r(F_1 \cup F_2)} (y-1)^{n(F_1 \cup F_2)} \\
&= \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_1) - r(F_1) + r(E_2) - r(F_2)} (y-1)^{n(F_1) + n(F_2)} \\
&= \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_1) - r(F_1)} (x-1)^{r(E_2) - r(F_2)} (y-1)^{n(F_1)} (y-1)^{n(F_2)} \\
&= \sum_{F_1 \subseteq E_1} (x-1)^{r(E_1) - r(F_1)} (y-1)^{n(F_1)} \left(\sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_2) - r(F_2)} (y-1)^{n(F_2)} \right) \\
&= T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)
\end{aligned}$$

Důsledek: dva grafy se stejným Tutteovým polynomem nemusí být stejné.

- vyplývá přímo z předpokladu – že se mohou protínat v nejvýše 1 vrcholu
- neobsahuje tedy informaci o počtu komponent či počtu vrcholů

Věta: Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Potom $T_G(x, y)$ je jednoznačně určen rekurencemi:

$E = \emptyset$ | $T_G(x, y) = 1$ |
most e | $T_G(x, y) = x \cdot T_{G-e}(x, y) = x \cdot T_{G \setminus e}(x, y)$ |
| poslední rovnost: z důsledku výše |
smyčka e | $T_G(x, y) = y \cdot T_{G-e}(x, y) = y \cdot T_{G \setminus e}(x, y)$ |
| poslední rovnost: odstranění smyčky je to stejné jako její kontrakce |
jindy | $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G \setminus e}(x, y)$ |

Důkaz: Pro $E = \emptyset$ jasné, jinak rozdělíme:

$$T_G(x, y) = \underbrace{\sum_{F \subseteq E, e \notin F} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}}_{s_1} + \underbrace{\sum_{F \subseteq E, e \in F} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}}_{s_2}$$

Stačí dokázat následující (a dosazení do výrazu výše):

1. pokud e není most, tak $s_1 = T_{G-e}(x, y)$
   - e není most, jeho odebráním se rank nezmění, tedy $r(E) = r(E \setminus \{x\})$
2. pokud e je most, tak $s_1 = (x - 1) \cdot T_{G-e}(x, y)$
   - e je most, jeho odebráním se rank zmenší o 1, tedy $r(E) = r(E \setminus \{x\}) + 1$
3. pokud e není smyčka, tak $s_2 = T_{G \setminus e}(x, y)$
   - e není smyčka, kontrakce však zachová zbylé hrany (jsme v multigrafu) jako smyčky a nulita se tedy nezmění (jelikož, pokud to chápu správně, se spojením vlastně zmenší jak počet hran, tak vrcholů)
4. pokud e je smyčka, tak $s_2 = (y - 1) \cdot T_{G \setminus e}(x, y)$
   - e je smyčka, kontrakcí se nulita zmenší o 1, tedy ()

Poté pro větu stačí následující:

- e je most: (2) + (3)
- e je smyčka: (1) + (4)
- e není most ani smyčka: (1) + (3)

Definice (chromatický polynom) multigrafu $G = (V, E)$ je funkce $\mathrm{ch}_G(b) : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$, kde pro $b \in \mathbb{N}_0$ je $\mathrm{ch}_G(b) :=$ počet dobrých obarvení (posunutí udělá nové obarvení) G pomocí barev $\{1, \ldots, b\}$.

- pokud G má smyčku, pak $\mathrm{ch}_G(b) = 0, \forall b$

Věta: Pro každý multigraf $G = (V, E)$ platí

$$\mathrm{ch}_G(b) = (-1)^{|V|+k(G)} \cdot b^{k(G)} \cdot T_G(1 - b, 0)$$

10. přednáška

Formální mocniné řady

Definice: Pro posloupnost reálných čísel $a_0, a_1, \ldots$ je formální mocninná řada (FMŘ) zápis tvaru $a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

- $\mathbb{R}[\![x]\!] \ldots$ všechny FMŘ nad x
- pro $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ je $[x^n]A(x) = a_n$
- pro FMŘ $A(x), B(x)$ je
  - $A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$
  - $A(x) \cdot B(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, kde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ (konvoluce)

Fakt: $\mathbb{R}[\![x]\!]$ tvoří (komutativní) okruh (máme $+, \cdot, 0, 1$)

- $0 = A(x)$ s nulovými koeficienty
- $1 = A(x)$ s $a_0 = 1$ a zbytek nulové koeficienty

Fakt: $\mathbb{R}[\![x]\!]$ tvoří vektorový postor (násobení konstantou je FMŘ pro $a_0 = c$)

Definice (převrácená hodnota) FMŘ $A(x)$ je taková FMŘ, že $A(x) \cdot B(x) = 1$

- $A(x) = c \ldots B(x) = \frac{1}{c}$
- $A(x) = x \ldots B(x)$ není (muselo by být něco jako $\frac{1}{x}$)
- $A(x) = 1 - x \ldots B(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$
  - $C(x) = A(x) \cdot B(x) = (1 + x + x^2 + \ldots) - (x + x^2 + x^3 + \ldots)$, kde $[x^n]C(x)$ bude nulové pro $n \geq 1$ (požere se to), proto $(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{1}{1-x}$

Tvrzení: Nechť $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je FMŘ. Potom $\frac{1}{A(x)}$ existuje, právě když $a_0 \neq 0$ (a pak je jednoznačně určena).

Důkaz: Hledejme inverz. Rozepsáním $A(x) \cdot B(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$ nám dává soustavu takovýchto rovnic, které mají jednoznačné řešení:

$$
\begin{aligned}
a_0b_0 &= 1 & b_0 &= \frac{1}{a_0} \\
a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 & b_1 &= \frac{1}{a_0}(-a_1b_0) \\
a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 & b_2 &= \frac{1}{a_0}(-a_1b_1 - a_2b_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Definice (složení) $A(x) = \sum a_n x^n, B(x) = \sum b_n x^n$ jsou FMŘ. Složení je $A(B(x)) = a_0 B(x)^0 + a_1 B(x)^1 + \dots$. Obecně je problém to zadefinovat, potřeboval bych znát hodnotu součtu, ale jde to, když:

1. $A(x)$ je polynom ($\equiv \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t. ž. $\forall n \geq n_0 : a_n = 0$)

$$a_0 B(x)^0 + a_1 B(x)^1 + a_2 B(x)^2 + \dots + \underbrace{a_{n_0} B(x)^{n_0} + \dots}_{=0}$$

2. $b_0 = 0$
   - chci ukázat, že součet $[x^n]\, A(B(x)) = [x^n]\, a_0 B(x)^0 + [x^n]\, a_1 B(x)^1 + \dots$ je konečný
     - $\left[x^0\right] B(x) = b_0 = 0$
     - $B(x) = x\tilde{B}(x)$ pro $\tilde{B}(x)$ FMŘ
     - $B(x)^k = x^k \tilde{B}(x)^k$, koeficient u $x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^0$ je nulový, tedy všechny koeficienty $\left[x^k\right] A(B(x))$ pro $k > n$ jsou nulové

Definice (derivace) FMŘ $A(x)$ značená $\frac{d}{dx}A(x) = \sum a_{n+1}(n+1)x^n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \dots$

Příklad: Můžu mít také FMŘ více proměnných, např. $A(x, y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} a_{n,m} \cdot x^n \cdot y^m \in \mathbb{R}[\![x, y]\!]$

Obyčejné vyvořující funkce

Definice (OVF) Nechť $\mathcal{A}$ je množina, jejíž každý prvek $\alpha \in \mathcal{A}$ má definovanou velikost $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$, předpokládáme že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ je v $\mathcal{A}$ konečně mnoho prvků velikosti n.

- $\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = n\}, a_n = |\mathcal{A}_n|$

Potom **obyčejná vytvořující funkce** pro $\mathcal{A}$ je FMŘ

$$\text{OVF}(\mathcal{A}) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Příklad: Jídla ($\mathcal{J} = \mathcal{P} \cup \mathcal{H}$):

- Polévky ($\mathcal{P}$)
  - gulášová: 30
  - knedlíčková: 35
- Hlavní jídla ($\mathcal{H}$)
  - guláš: 100
  - řízek: 100
  - smažák: 90
- $P(x) = \text{OVF}(\mathcal{P}) = x^{30} + x^{35}$
- $H(x) = \text{OVF}(\mathcal{H}) = x^{90} + 2x^{100}$
- $J(x) = P(x) + H(x)$
- **(👀):** $\text{OVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \text{OVF}(\mathcal{A}) + \text{OVF}(\mathcal{B})$
- **(👀):** $\text{OVF}(\mathcal{A}) \cdot \text{OVF}(\mathcal{B}) = \text{OVF}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$
  - $P(x) \cdot H(x) =$ kartézský součin dvojic (polívka, hlavní jídlo)
  - $[x^{130}](J(x) \cdot J(x)) =$ počet uspořádaných dvojic jídel, které se sečtou na 130

11. přednáška

Exponenciální vytvořující funkce

Chci dojít k $L(x)$, což bude vytvořující funkce pro počet lesů na n vrcholech, pomocí $S(x)$ vytvořující funkce pro počet stromů na n vrcholech.

Nechť s_n je počet stromů na vrcholech $\{1, \dots, n\}$

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad \in \mathbb{R}[\![x]\!]$$

Nechť k_n je počet kružnic na vrcholech $\{1, \dots, n\}$

$$K(x) = \sum_{n \geq 0} k_n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Definujeme $A(x) = S(x) \cdot K(x)$ a $a_0, a_1, \dots$ tak, aby $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

Potom platí, že $a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot s_j \cdot k_{n-j}$, tedy $a_n =$ počet grafů na n vrcholech mající dvě komponenty souvislosti, z nichž jedna je strom a druhá kružnice:

$$\begin{aligned}
[x^n]\,(S(x) \cdot K(x)) &= \sum_{j=0}^{n} \left([x^j]\,S(x)\right) \cdot \left([x^{n-j}]\,K(x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{s_j}{j!} \cdot \frac{k_{n-j}}{(n-j)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{1}{n!} \cdot s_j k_{n-j} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s_j k_{n-j} \\
&= [x^n]\,A(x)
\end{aligned}$$

Definujeme $B(x) = S(x)^2$ a $b_0, b_1, \dots$ tak, aby $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

- počet způsobů, jak rozdělit vrcholy na červené a modré a vytvořit strom na každé barvě

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot s_j \cdot s_{n-j}$$

Dále definujeme hromadu dalších věcí:

- $C(x)$ jako $c_n = \frac{b_n}{2}$, abychom měli počet lesů se dvěma komponentami, tedy $C(x) = \frac{1}{2}B(x) = \frac{1}{2}S^2(x)$.
- $D(x) = S^k(x)$, tedy d_n je počet uspořádaných k-tic stromů tvořící rozklad vrcholů
- $E(x) = \frac{S^k(x)}{k!}$, tedy e_x je počet lesů s k komponentami

Konečně vyjádříme

$$L(x) = 1 + S(x) + \frac{S^2(x)}{2!} + \ldots = \sum_{n \geq 0} \frac{S^n(x)}{n!} = \exp(S(x)) = e^{S(x)}$$

V následujících definicích a pozorováních je *takovýhle text* odkaz na to, co si pod tím představovat v rámci minulého příkladu.

Definice (EVF) Mějme množinu $\mathcal{A}$ (*všechny konečné stromy s očíslovanými vrcholy*), předpokládejme:

1. každý prvek $\alpha \in \mathcal{A}$ (*nějaký strom*) má množinu vrcholů (*vrcholů*) $V(\alpha) \subseteq \mathbb{N}, V(\alpha)$ konečná
2. pro každou konečnou $V \subseteq \mathbb{N}$ existuje konečně mnoho $\alpha \in \mathcal{A}$ t. ž. $V(\alpha) = V$
   - (*existuje konečné množství stromů*)
3. pro dvě konečné množiny $V, W \subseteq \mathbb{N}$ t. ž. $|V| = |W|$ platí, že počet $\alpha \in \mathcal{A}$ t. ž. $V(\alpha) = V$ je stejný jako $\alpha \in \mathcal{A}$ t. ž. $V(\alpha) = W$ (co do počtu, záleží jen na velikosti množiny vrcholů)
   - (*dvě stejně velké množiny vrcholů mají stejný počet stromů*)

Potom **exponenciální vytvořující funkce** pro $\mathcal{A}$ je

$$\mathrm{EVF}(\mathcal{A}) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

kde

$$a_n = \# \ \alpha \in \mathcal{A} \text{ t. ž. } V(\alpha) = \{1, \dots, n\}$$

(👀): Nechť $A(x)$ je $\mathrm{EVF}(\mathcal{A}), B(x) = \mathrm{EVF}(\mathcal{B})$, potom:

1. pokud $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou disjunktní (příklad výše), pak $A(x) + B(x)$ je $\mathrm{EVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$
   - stejné jako u OFV, protože $[x^n]\left(A(x) + B(x)\right) = \frac{a_n}{n!} + \frac{b_n}{n!} = \frac{a_n + b_n}{n!}$
2. $A(x) \cdot B(x) = \sum c_n \frac{x^n}{n!}$, kde c_n je počet uspořádaných dvojic (α, β) t.ž. $\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}, V(\alpha) \cup V(\beta) = \{1, \dots, n\}$ (tvoří rozklad)
3. $A^k(x) = \sum d_n \frac{x^n}{n!}$, kde d_n je počet uspořádaných k-tic $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, kde

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{A} \text{ t.ž. } V(\alpha_1) \cup \ldots \cup V(\alpha_k) = \{1, \dots, n\} \qquad \star$$

4. pokud $V(\alpha) \neq \emptyset, \forall \alpha \in \mathcal{A}$, pak

$$\frac{A^k(x)}{k!} = \sum e_n \frac{x^n}{n!}$$

   kde e_n je počet k-prvkových množin splňujících $\star$
5. pokud $\forall \alpha \in \mathcal{A} : V(\alpha) \neq \emptyset$, pak

$$\exp(\mathcal{A}(x)) = e^{A(x)} = 1 + A(x) + \frac{A^2(x)}{2} + \ldots = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$$

   kde f_n je počet množin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathcal{A}$, kde $V(\alpha_1) \cup \ldots \cup V(\alpha_k) = \{1, \dots, n\}$

Groupy a Burnside

Definice (akce grupy) nechť A je množina, nechť Γ je grupa, 1_Γ její neutrální prvek. Potom akce grupy Γ na množině A je binární operace $\cdot : \Gamma \times A \mapsto A$ t.ž.

1. $\forall x \in A : 1_\Gamma \cdot x = x$
2. $\forall \gamma, \delta \in \Gamma, \forall x \in A : \gamma \cdot (\delta \cdot x) = (\gamma\delta) \cdot x$
   - pozor, $\cdot$ a $\gamma\delta$ jsou jiné operace

(👀): Pokud $\gamma \in \Gamma, \gamma^{-1}$ je inverzní prvek k γ, potom $\forall x, y \in A : \gamma \cdot x = y \iff \gamma^{-1} \cdot y = x$

Důsledek: $\forall p \in \Gamma$: zobrazení $x \mapsto p \cdot x$ je bijekce $A \longleftrightarrow A$

12. přednáška

Definice (množina pevných bodů) $\gamma \in \Gamma$, značená $\mathrm{Fix}(\gamma) = \{x \in A \mid \gamma x = x\}$

Definice (stabilizátor) prvku $x \in A$ je $\mathrm{Stab}(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$

(👀): $\gamma \in \Gamma, x \in A : \gamma \in \mathrm{Stab}(x) \iff x \in \mathrm{Fix}(\gamma) \iff \gamma x = x$

(👀): $\mathrm{Stab}(x)$ je podgrupa Γ

- $1_\Gamma \in \mathrm{Stab}(x)$, protože $1_\Gamma x = x$
- $\gamma \in \mathrm{Stab}(x) \Rightarrow \gamma^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$ z pozorování $\gamma x = y \iff x = \gamma^{-1} y$

- $\gamma, \delta \in \mathrm{Stab}(x) \Rightarrow \gamma x = x, \delta x = x$, dosazením dostávám $\gamma\delta x = x$

Prvky $x, y \in A$ jsou ekvivalentní (značím $x \sim_\Gamma y$), pokud $\exists \gamma \in \Gamma$ t.ž. $\gamma x = y$

- **(👀):** $\sim_\Gamma$ je to ekvivalence:
  - reflexivní – $x = 1_\Gamma x$
  - symetrická – $\gamma x = y \iff \gamma^{-1} y = x$
  - transitivní – $\gamma x = y \wedge \gamma y = z \Rightarrow (\delta\gamma)x = z$

Definice (orbita) obsahující prvek $x \in A$ je množina

$$[x]_\Gamma = \{y \in A \mid x \sim_\Gamma y\} = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$$

možinu orbit značíme A/Γ.

Příklad: Koláčky (mák, tvaroh, povidla).

$$\mathcal{K} = \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{smallmatrix}} \mid a, b, c, d \in \{T, M, P\} \right\} \qquad |\mathcal{K}| = 3^4 = 81$$

$$\Gamma = \{\text{otočení o násobky } 90° \text{ mod } 360°\} = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$$

- akce odpovídají otočením koláčku.
- $\mathrm{Fix}(180°) = \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix} & b & \\ a & & a \\ & b & \end{smallmatrix}} \mid a, b \in \{T, M, P\} \right\}$
- $\mathrm{Stab}\left(\boxed{\begin{smallmatrix} & T & \\ M & & M \\ & P & \end{smallmatrix}} \right) = \{0°\}$
- $\left[\left[\boxed{\begin{smallmatrix} & T & \\ M & & M \\ & P & \end{smallmatrix}} \right]\right] = \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix} & T & \\ M & & M \\ & P & \end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix} & M & \\ P & & T \\ & M & \end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix} & P & \\ M & & M \\ & T & \end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix} & M & \\ T & & P \\ & M & \end{smallmatrix}} \right\}$

Lemma (o orbitě stabilizátoru) Nechť Γ je konečná grupa s akcí na množině A. Potom

$$\forall x \in A : |\mathrm{Stab(x)}| \cdot |\,[x]\,| = |\Gamma|$$

Důkaz: Nechť množina $\mathrm{Map}(x, y)$ je množina akcí a, pro které $a \cdot x = y$. Pro akce $\sigma \in \mathrm{Map}(x, y)$ pomocí $\sigma a \sigma^{-1}$ lze definovat bijekci mezi $\mathrm{Map}(x, x)$. Poté

$$\forall x \in A, |\Gamma| = \sum_{y \in [x]} |\mathrm{Map}(x, y)| = \sum_{y \in [x]} |\mathrm{Stab}(x)| = |[x]||\mathrm{Stab}(x)|$$

Věta (Burnsideovo lemma) Nechť Γ je konečná grupa s akcí na A

1. (jednoduchá) pokud A je konečná, pak

$$|A/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\gamma)|$$

   = počet orbit je roven „průměrnému počtu pervných bodů“
2. Nechť každá orbita $o \in A/\Gamma$ má přiřazenou váhu $w(o)$. Potom

$$\sum_{o \in A/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\gamma)} w([x])$$

Důkaz: (2) $\Rightarrow$ (1), když jsou váhy 1.

(2) – dvojím počítáním $s := \sum_{(\gamma, x) \in \Gamma \times A, \gamma x = x} w([x])$

$$s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\gamma)} w([x]) \qquad \text{z definice}$$

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{x\in A}\sum_{\gamma\in \mathrm{Stab}(x)} w([x]) && \text{počítání obráceně, přes Stab}\\
&= \sum_{o\in A/\Gamma}\sum_{x\in o}\sum_{\gamma\in \mathrm{Stab}(x)} w(o) && w([x]) \text{ závisí pouze na váze orbity}\\
&= \sum_{o\in A/\Gamma}\sum_{x\in o} |\mathrm{Stab}(x)| w(o) && \text{vnitřní suma závisí na } \mathrm{Stab}(x)\\
&= \sum_{o\in A/\Gamma}\sum_{x\in o} \frac{|\Gamma|}{|o|} w(o) && \text{lemma o orbitě a stabilizátoru}\\
&= \sum_{o\in A/\Gamma} |o|\frac{|\Gamma|}{|o|} w(o) && \text{obsah sumy závisí na velikosti orbity}\\
&= |\Gamma| \sum_{o\in A/\Gamma} w(o)
\end{aligned}$$

Poté první a druhý způsob dám do rovnosti, vydělím velikostí grupy a hotovo.

Příklad: Koláčky na steroidech: množina koláčků $\mathcal{R}$, v každé části nezáporný počet rozinek, akce jsou stejné. Pro $k \in \mathbb{N}_0, a_k =$ počet orbit, jejichž koláčky mají celkem k rozinek. Cíl je získat vzorec pro $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ Použijeme obecnější Burnsideovo lemma. Chceme, aby

$$A(x) = \sum_{o\in A/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in \mathrm{Fix}(\gamma)} w([x])$$

Váhu orbity s k rozinkami nastavíme na x^k. Pro $q \in \mathcal{R}$ označím $r(q)$ počet rozinek v q, $w([q]) = x^{r(q)}$.

γ	1_Γ	90°, 270°	180°
$\mathrm{Fix}(\gamma)$	$\mathcal{R}$	všude je stejný počet rozinek	protější strany mají stejný počet rozinek
$\sum_{q\in \mathrm{Fix}(\gamma)} w([q])$	$\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$	$\frac{1}{1-x^4}$	$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$

Vytvořující funkce z tabulky jsme odvodili následně:

$$\sum_{q\in \mathrm{Fix}(\gamma)=\mathcal{R}} = \sum_{q\in\mathcal{R}} x^{r(q)} = \sum_{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}_0^4} x^{a+b+c+d} = \left(\sum_{a\in\mathbb{N}_0} x^a\right)^4 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$

$$\sum_{q\in \mathrm{Fix}(\gamma)=\{(a,a,a,a)|a\in\mathbb{N}_0\}} = \sum_{a\in\mathbb{N}_0} x^{4a} = \frac{1}{1-x^4}$$

$$\sum_{q\in \mathrm{Fix}(\gamma)=\{(a,b,a,b)|a,b\in\mathbb{N}_0\}} = \left(\sum_{a\in\mathbb{N}_0} x^{2a}\right)\left(\sum_{b\in\mathbb{N}_0} x^{2b}\right) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$$

Tedy dostáváme, že

$$A(x) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{1-x^4}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\right)$$

13. přednáška

Extremální teorie grafů a hypergrafů

Definice: pro graf H označím $\mathrm{ex}(n, H)$ největší m t.ž. existuje graf G s n vrcholy, m hranami a neobsahující H jako podgraf.

- $\mathrm{ex}(n, K_3) = |E(K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil})| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil \cong n^2$
- $\mathrm{ex}(n, C_4) = \mathcal{O}(n^{3/2}) = \mathcal{O}(n\sqrt{n})$
  - viz. poznámky z Kombinatoriky a Grafů I

Definice: $k, n \in \mathbb{N}$, označme $T_k(n)$ úplný k-partitní graf na n vrcholech, jehož všechny partity mají velikost $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{k} \rceil$. Nechť $t_k(n) = |E(T_k(n))|$

- k-partitní je to samé jako k-obarvitelný ($\mathrm{X}(G)$)
- partity mohou být i prázdné – k-partitní je i k'-partitní, pro $k' \geq k$
- úplný k-partitní – každé 2 partity jsou úplný bipartitní graf

(👀): $\forall r \in \mathbb{N}, r \geq 2 : \mathrm{ex}(n, K_r) \geq t_{r-1}(n)$, protože $T_{r-1}(n)$ neobsahuje K_r (z každé partity si klika vezme ≤ 1 vrchol, tedy nejvýše $r - 1$)

Lemma (1) Každý k-partitní graf na n vrcholech má nanejvýš $t_k(n)$ hran.

- $= t_k(n)$ jsou mezi k-partitními nejlepší

Důkaz: Nechť $G = (V, E)$ je k-partitní, $P_1, \ldots, P_k$ jsou jeho partity. Navíc $|P_1| \leq |P_2| \leq \ldots \leq |P_k|$

- buď $|P_k| \leq |P_1| + 1$, pak $G \cong T_k(n)$
- jinak pro spor $|P_k| \geq |P_1| + 2$
  - idea důkazu je ta, že vezmeme vrchol z poslední partity a přesuneme ho do první
  - nechť $x \in P_k$, nechť $\tilde{G}$ je úplný k-partitní s partitami $P_1 \cup \{x\}, P_2, P_3, \ldots, P_k \setminus \{x\}$; potom $|E(\tilde{G})| > |E(G)|$, což je spor:
    * stupně pro $P_2, \ldots, P_k$ se nemění (vrcholy stále vidí x, jen je teď jinde)
    * stupně pro P_1 klesne o 1 (vrcholy přestanou vidět x)
    * stupně pro $P_k \setminus \{x\}$ vzroste o 1 (vrcholy začnou vidět x)
    * stupně pro x vzroste alespoň o 1 (x přestane vidět P_1 a začne vidět P_k)

Lemma (2) Nechť $G = (V, E)$ je graf neobsahující K_r jako podgraf. Potom $\exists H = (V, E_H)$ $(r-1)$-partitní t.ž. $\deg_G(x) \leq \deg_H(x)$ (a tudíž $|E(G)| \leq |E(H)|$)

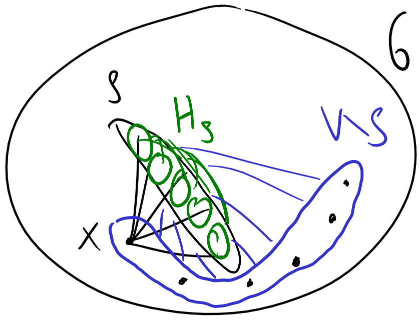
- $=$ pro graf neobsahující K_r jako podgraf jsou $(r-1)$-partitní nejlepší

Důkaz: indukcí podle r

- $r = 2 \Rightarrow G$ neobsahuje K_2 a je tedy nemá hrany; $G = H$ splňuje tvrzení (celé tvoří jednu partitu)
- $r > 2$: G neobsahuje K_r:

Nechť $x \in V(G)$ je vrchol max. stupně v G

- $S = N_G(x)$ (sousedství)
- $G_S = G[S]$ (podgraf indukovaný S)
  - **(👀):** G_S neobsahuje k_{r-1}, jinak $G[S \cup \{x\}]$ obsahuje k_r
  - využijeme IP: $\exists (r-2)$-partitní graf $H_S = (S, E_{H_S})$
    * splňuje (dle IP), že $\forall y \in s : \deg_{H_S}(y) \geq \deg_{G_S}(y)$
    * $V \setminus S$ zadefinuji jako $((r-1).)$ partitu a vše patřičně spojím, čímž získám H



Ověříme $\forall x \in V : \deg_G(x) \leq \deg_H(x)$

1. $y \in V \setminus S : \deg_H(y) = |S| = \deg_H(x) = \deg_G(x) \geq \deg_G(y)$ (x je vrchol s největším stupněm)
2. $y \in S : \deg_H(y) = \deg_{H_S}(y) + |V \setminus S| \overset{\text{IP}}{\geq} \deg_{G_S}(y) + |V \setminus S| \geq \deg_G(y)$
   - rozdělili jsme to na dva případy podle toho, co vidí uvnitř a co vně S
   - poslední nerovnost plyne z toho, že y v G vidí sousedy v G_S + nanejvýš všechny z $V \setminus S$

Věta (Turán, 1941) $\forall r \geq 2 : \text{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$

Důkaz: Vezmu G nějaký graf bez K_r.

- už jsme (v pozorování výše) viděli $\text{ex}(n, K_r) \geq t_{r-1}(n)$ (protože $T_{r-1}(n)$ neobsahuje K_r)
- dle tvrzení (2) $\exists (r-1)$-partitní graf H t.ž. $|E(G)| \leq |E(H)|$
- dle tvrzení (1) je $|E(H)| \leq t_{r-1}(n) \Rightarrow |E(G)| \leq t_{r-1}(n) \Rightarrow \text{ex}(n, K_r) \leq t_{r-1}(n)$

Spojení odhadů dává rovnost.

Poznámka: $t_k(n) = \frac{k-1}{k}\binom{n}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{k-1}{2k}n^2 + \mathcal{O}(n)$

Definice: pro graf $H : \text{ex}_{\preceq}(n, H)$ je maximalní počet hran grafu G na n vrcholech bez H jako minoru.

(👀): $\text{ex}(n, H) \geq \text{ex}_{\preceq}(n, H)$, protože graf bez H-minoru nemá ani H-podgraf

- obráceně platit nemusí.

(👀): $\text{ex}_{\preceq}(n, K_3) = n - 1$ (dostávám stromy!)

Věta: $\forall r \geq 3 \exists c_r > 0 : \forall n : \text{ex}_{\preceq}(n, K_r) < c_r \cdot n$

- jinými slovy: každý graf $G = (V, E)$ s $|E| \geq c_r \cdot n$ obsahuje K_r-minor
- ještě jinými slovy: grafy, kterým zakážeme K_r-minor mají lineární počet hran (pro nějakou konstantu c_r závisející pouze na r)

Důkaz: dokážeme pro $c_r = 2^{r-3}$, indukcí dle r

- základ $r = 3$, což jsou lesy a víme, že platí
- $r > 3$, sporem
  - $\exists G = (V, E)$ neobsahující K_r-minor ale $|E| \geq c_r \cdot |V|$ a zároveň min. pro $|V| + |E|$
  - pokud $G' = (V', E')$ je vlastní minor G, tak $|E'| < c_r \cdot |V'|$, jinak bychom zvolili G'

Pomocné tvrzení: $\forall \{x, y\} = e \in E$ platí $|N(x) \cap N(y)| \geq c_r$

Důkaz: Vezmu $G' = G.e$

- $|E| \geq c_r \cdot |V|$ (protože G je protipříklad)
- $|E'| < c_r \cdot |V'| = c_r(|V| - 1)$ (protože G' není protipříklad)

Odečtem nerovností máme $|E| - |E'| > c_r$. Navíc $|E| - |E'| = 1 + |N(x) \cap N(y)|$ (zanikají hrany do společných sousedů a navíc hrana e), dosazením dostáváme hledanou nerovnost.

K důkazu původního vyberu $x \in V(G)$, $S = N_G(x), G_S = G[S]$.

- dle pomocného tvrzení $\forall y \in S : \deg_{G_S}(y) \geq c_r$, jelikož všichni sousedé x leží v S.
- $|E(G_S)| \geq \frac{c_r}{2} \cdot |S| = \frac{2^{r-3}}{2}|S| = c_{r-1}|S|$
  - dle IP musí G_S obsahovat K_{r-1} minor a ten spolu s x tvoří v G K_r-minor, což je spor

Poznámka: odhad byl dost hrubý, věta platí dokonce pro $c_r = \mathcal{O}(r \cdot \sqrt{\log r})$

Definice: k-uniformní hypergraf je dvojice (V, E), kde $E \subseteq \binom{V}{k}$

- $f(k, n) :=$ max. m t.ž. $\exists$ k-uniformní hypergraf $H = (V, E)$ t.ž. $|V| = n, |E| = m$ a E je „pronikající systém množin" (t.j. $\forall e, e' \in E : e \cap e' \neq \emptyset$)
  - braní všech hran nemusí fungovat (musí se protínat všechny dvojice)!

(👀): rozebereme několik případů:

- $k > n : f(k, n) = 0$, protože neexistují hyperhrany
- $k \leq n < 2k : f(k, n) = \binom{n}{k}$, protože každé dvě množiny z $\binom{V}{k}$ se protínají
- $n \geq 2k : f(k, n) \geq \binom{n-1}{k-1}$ – konstrukce, kde $E = \left\{\{1\} \cup e' \mid e' \in \binom{\{2,\ldots,n\}}{k-1}\right\}$
  - „slunečnicová" proto, že vezmeme jeden střed a poté hrany na zbylých vrcholech

Věta (Erdös-Ko-Rado, 196*) $\forall k, n \in \mathbb{N} : n \geq 2k \Rightarrow f(k, n) = \binom{n-1}{k-1}$

Důkaz: dokazujeme dva odhady:

- dolní odhad $f(k, n) \geq \binom{n-1}{k-1}$ ze slunečnicové konstrukce
- horní odhad $f(k, n) \leq \binom{n-1}{k-1}$: máme $H = (V, E)$ k-uniformní hypergraf t.ž. E je protínající systém množin

Definice: cyklické pořadí $\{1, \ldots, n\}$ je nějaká 1-cyklová permutace $\{1, \ldots, n\}$

- k-intervaly (v tomhle příkladě 3-intervaly) permutace $C = (3, 1, 5, 4, 2, 7, 6, 8)$ jsou $315, 154, 542, 768, 683, 831$

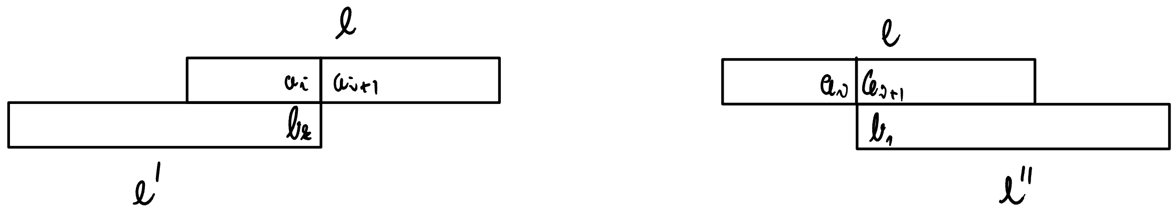
(👀): intervalů daného pořadí C je n

(👀): cyklických pořadí je $(n-1)!$

- kvůli tomu, že libovolnou permutaci můžu posunout o n míst a stále to bude stejný cyklus

(👀): pokud $e = \{a_1, \ldots, a_k\}$ je vůči C interval, pak $\exists \leq k-1$ dalších hran e' t.ž. jsou intervaly vůči C

Důkaz: Může nastat vždy právě jeden z následujících případů, protože z předpokladu je E pronikající systém množin (a e' s e'' by byly disjunktní):



Dvojic je tedy nejvýše $r - 1$.

Důkaz věty bude dvojí počítání (e, C) t.ž. $e \in E, c$ cyklické pořadí a e tvoří v C interval.

1. vezmu e a chci tvořit cyklické pořadí t.ž. e tvoří interval: e zpermutuji $k!$ způsoby a $V \setminus e$ zpermutuji $(n-k)!$ způsoby, pro každou hranu, tedy
$$\#(e, C) = |E| \cdot k! \cdot (n-k)!$$
2. vezmu C: těch je $(n-1)!$
   - podle pozorování je e tvořících interval nanejvýš k, tedy
$$\#(e, C) \leq k \cdot (n-1)!$$

Spojením dostávám
$$|E| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Zdroje/materiály

- stránky přednášky
- poznámky Václava Končického z roku 2019

Poděkování

- Eldaru Urmanovi za upozornění na několik překlepů/chyb v důkazech a definicích
- Matěji Kripnerovi za důkazy některých tvrzení a opravy překlepů
- Kateřině Sulkové za naprosto nesmyslný nápad přejmenovat Burnsideovo lemma na „Rumcajsovo“