

Matematická analýza II

Poznámky z materiálů prof. Pultra

Zimní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak, Tomáš Sláma

Obsah

1	Metrické prostory	3
1.1	Definice metrického prostoru	3
1.2	Triviality	3
1.3	Věty o metrických prostorech	4
1.4	Okolí, množiny, uzávěry	4
1.5	Vzory a obrazy	5
1.6	Ekvivalence metrik	6
1.7	Součiny	6
1.8	Věta o spojitých zobrazeních	7
2	Parciální derivace	7
2.1	Definice a značení	7
2.2	Totální diferenciál	9
2.2.1	Definice totálního diferenciálu	9
2.2.2	Věty o totálním diferenciálu	9
2.3	Počítání parciálních derivací	10
2.3.1	Složené funkce	10
2.3.2	Násobení	12
2.3.3	Dělení	12
2.4	Lagrangeovy věty	12
2.5	Záměnnost pořadí při parciálních derivacích	13
2.6	Věta o konvergentní podposloupnosti	15
3	Kompaktní prostory	15
3.1	Vlastnosti kompaktních prostorů	15
3.2	Omezené metrické prostory	16
3.3	Euklidovské metrické prostory	16
3.4	Spojité zobrazení	16
3.5	Cauchyovské posloupnosti	17
3.6	Úplné metrické prostory	18
4	Implicitní funkce	18
4.1	Věty o implicitní funkci	19
5	Vázané extrémy	21
5.1	Regulární zobrazení	24
6	Stejnoměrná spojitost	25
7	Objemy a obsahy	25
7.1	Vlastnosti	25
8	Opakování Riemannova integrálu v jedné proměnné	26
8.1	Existence Riemannova integrálu	27
8.2	Integrální věta o střední hodnotě	28
8.3	Základní věta analýzy	28

9	Riemannův integrál ve více proměnných	29
9.1	Definice	29
9.2	Existence	31
9.3	Riemannův integrál pro spojitě funkce	31
9.4	Fubiniova věta	31
9.5	Lebesgueův integrál	33
9.6	Tietzeova věta	33

1 Metrické prostory

1.1 Definice metrického prostoru

Definice (Metrický prostor): Necht X je množina, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkce t. ž. platí:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

pak (X, d) je metrický prostor.

Příklad: Zde je několik metrických prostorů:

$$(\mathbb{R}, |x - y|),$$

$$(\mathbb{C}, |x - y|),$$

$$(G, d), G \text{ je orientovaný souvislý graf, } d \text{ je délka nejdelší cesty}$$

Pozor: trojúhelníková nerovnost v $(\mathbb{C}, |x - y|)$ není tak triviální jako v $\mathbb{R}$.

Definice (Euklidovský prostor $\mathbb{E}_n$): Definujeme jako metrický prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, kde d :

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvlášť důležitý, známý v podobě vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ a normou $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ a vzdáleností $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

Definice (Diskrétní prostor): Definujeme jako (X, d) , kde $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$

Definice (Podprostor): Buď (X, d) metrický prostor. Pak (Y, d') je podprostor, kde $Y \subseteq X$ a $\forall x, y \in Y : d'(x, y) = d(x, y)$.

Definice (Spojité zobrazení): $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojitě zobrazení, pokud

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

1.2 Triviality

Definice (Identické zobrazení): $f(x) = x$ je spojitě zobrazení

$$(X, d) \rightarrow (X, d)$$

Definice (Vložení podprostorů): je spojitě zobrazení

$$f_1 : (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \rightarrow (X_1, d_1)$$

$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_1(x, y) = x$$

$$f_2 : (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \rightarrow (X_2, d_2)$$

$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_2(x, y) = y$$

obecně pro $j = 1, \dots, n$ máme

$$f_j : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$$

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$$

Definice (Konvergence): Posloupnost $(x_n)_n$ v metrickém prostoru (X, d) konverguje k $x \in X$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$$

1.3 Věty o metrických prostorech

Věta (Složení spojitých zobrazení je spojitě): Pokud jsou $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ a $g : (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ spojitě, pak i

$$g \circ f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_3, d_3)$$

je spojitě.

Věta (Věta o konvergenci): Zobrazení $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ je spojitě právě když pro každou konvergentní $(x_n)_n$ v (X_1, d_1) posloupnost $(f(x_n))_n$ konverguje v (X_2, d_2) a platí $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ Buď f spojitá a necht' $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ volme ze spojitosti $\delta > 0$ tak, aby $d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$. Tedy je-li $n \geq n_0$ máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

$\neg \Rightarrow \neg$ Necht' f není spojitá. Potom existují $x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $y(\delta)$ takové, že

$$d_1(x, y(\delta)) < \delta \quad \text{ale} \quad d_2(f(x), f(y(\delta))) \geq \varepsilon_0$$

Položme $x_n = y(1/n)$. Potom $\lim_n x_n = x$ ale $(f(x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$.

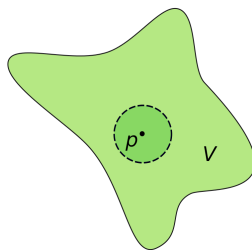
□

1.4 Okolí, množiny, uzávěry

Definice (Okolí): Necht' (X, d) je metrický prostor, $x \in X$, pak

$$\Omega(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Formulaci $\Omega(x, \varepsilon)$ se říká otevřená koule s poloměrem ε okolo x .



Obrázek 1: Ilustrace ε -okolí bodu p v podprostoru $\mathbb{E}_2$.

Příklad (Použití okolí): " U je okolí x " $\equiv \exists \varepsilon > 0, \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$

Definice (Otevřená množina): $U \subseteq (X, d)$ je otevřená, pokud je okolím každého svého bodu.

Definice (Uzavřená množina): $V \subseteq (X, d)$ je uzavřená, pokud každá posloupnost $\forall (x_n)_n \subseteq V$ konvergentní v X má limitu $\lim x_n \in V$.

Příklad: Uvážíme-li interval $(0, \infty)$ s Euklidovskou metrikou, pak

- $\langle 1, 2 \rangle$ je pouze uzavřený
- $(0, 1)$ je také pouze uzavřený (všechny limity konvergující v X mají limitu ve V)
- $(1, \infty)$ je pouze otevřený
- $(0, \infty)$ je jak otevřený, tak uzavřený

Definice (Vzdálenost od množiny): Necht' (X, d) je metrický prostor, $A \subseteq X, x \in X$, pak vzdálenost bodu x od množiny A je

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

Definice (Uzávěr): $\bar{A} : \{x \mid d(x, A) = 0\}$

1.5 Vzory a obrazy

Pro zbytek sekce necht' $f : X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$.

Definice (Obraz): Obraz podmnožiny $A \subseteq X$ v Y :

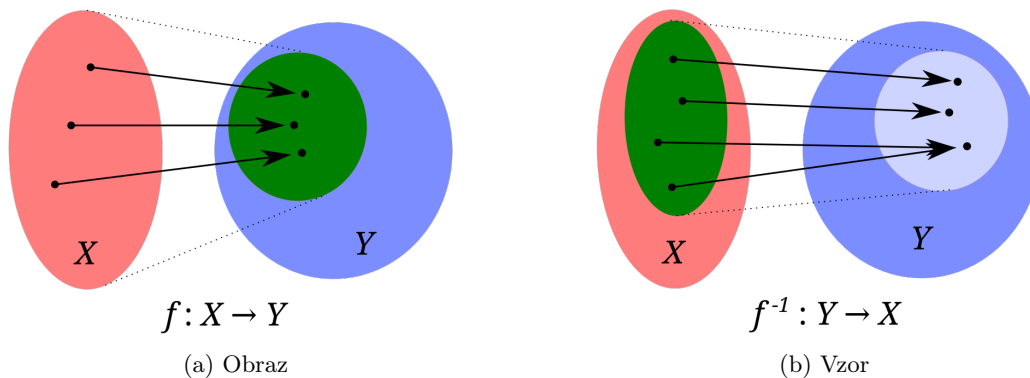
$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Definice (Vzor): Vzor podmnožiny $B \subseteq Y$ v X :

$$f^{-1}[B] = \{x \mid x \in X : f(x) \in B\}$$

$$X \xrightleftharpoons[f^{-1}[-]]{f[-]} Y$$

Inverzní funkce $f^{-1} : Y \rightarrow X$ (značíme $f^{-1}(B)$) nemusí existovat, kdežto $f^{-1}[B]$ existuje vždy



Obrázek 2: Ilustrace obrazu a vzoru množin X a Y . Výsledek operace je vždy zelená množina.

Tvrzení (Vztahy vzorů a obrazů):

$$f[A] \subseteq B \equiv A \subseteq f^{-1}[B],$$

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B$$

$$f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

Věta (Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory): Buďte (X_1, d_1) a (X_2, d_2) metrické prostory a buď zobrazení $f : X_1 \rightarrow X_2$. Následující tvrzení jsou potom ekvivalentní:

1. f je spojitý.
2. $\forall x \in X_1$ a $\forall$ okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.
3. $\forall$ otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1 .
4. $\forall$ uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1 .
5. $\forall A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

1.6 Ekvivalence metrik

Definice (Topologická vlastnost/definice): Vlastnost/definice je topologická, je-li zachována homeomorfismy. Jsou to (mimo jiné):

1. konvergence
2. otevřenost, uzavřenost
3. uzávěr
4. okolí
5. spojitost (ale ne stejnoměrná spojitost!)

Definice (Ekvivalentní metriky): Metriky d_1, d_2 na téže množině jsou ekvivalentní, pokud

$$\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$$

je homeomorfismus. Získáme tím prostor, ve kterém jsou všechny topologické záležitosti (spojitost, uzavřenost, ...) zachovány.

Definice (Silně ekvivalentní metriky): Metriky d_1 a d_2 na téže množině jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

Jsou si tedy vždy rovné až na násobek omezený čísly α a β .

1.7 Součiny

Definice (Součin): Pro $(X_i, d_i), i = 1, \dots, n$ definujeme na kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i)$$

Získaný

$$\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů (X_i, d_i) . Píše se též

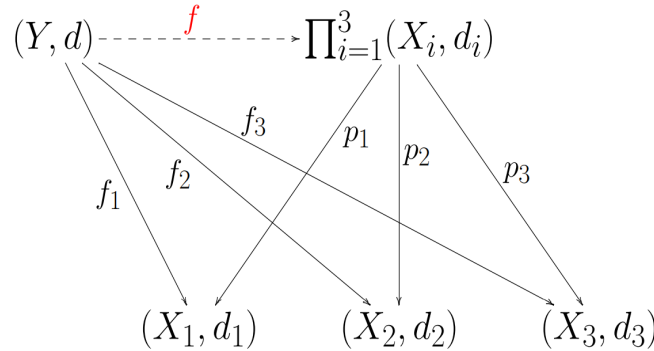
$$(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

1.8 Věta o spojitých zobrazeních

Věta (O spojitých zobrazeních):

1. Projekce $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.
2. Buďte $f_j : (Y, d') \rightarrow (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení $f : (Y, d') \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_j$, totiž zobrazení definované předpisem $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojité.

Intuice: Jak to vypadá:



Tedy pokud víme, že $(x_1, x_2, x_3) \in \prod (x_i, d_i)$, Pak

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y))$$

$$(p_1 \circ f)(y) = p_1(f(y)) = p_1(f_1(y), f_2(y), f_3(y)) = f_1(y)$$

$$(p_2 \circ f)(y) = \dots = f_2(y)$$

$$(p_3 \circ f)(y) = \dots = f_3(y)$$

Existuje přesně jedno f takové, že

$$p_i \circ f = f_i$$

a je spojité.

2 Parciální derivace

Definice (Reálná funkce o n proměnných):

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné se nemůžeme omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor $\mathbb{E}_n$. V případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů, zde budou definiční obory složitější.

2.1 Definice a značení

Definice (Parciální derivace): Pro funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ a bod $\mathbf{a}$ definujeme funkci

$$\phi_k(t) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Parciální derivace funkce f podle proměnné x_k v bodě $\mathbf{a}$ je (obvyklá) derivace funkce ϕ_k v bodě a_k

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_k(a_k + h) - \phi_k(a_k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Značíme

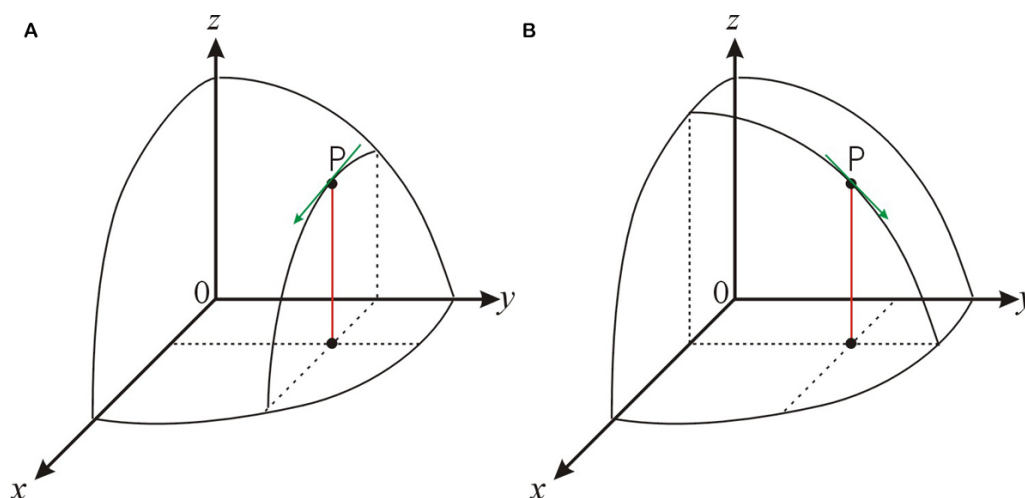
$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}),$$

Když $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k}$ existuje pro všechna $\mathbf{a}$ v nějakém okolí D , pak dostáváme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Při použití bude vždy zřejmé, máme-li na mysli funkci nebo hodnotu limity výše.

Intuice: Geometricky odpovídá tečně funkce v daném bodě a příslušné ose (viz 5).



Obrázek 3: Geometrický význam parciální derivace funkce v bodě P .

Příklad: Mějme funkci

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - 15y$$

Její parciální derivace v x je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^2 + 2y$$

a analogicky v y je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 15$$

Příklad (hledání extrémů): Parciální derivace můžeme použít k hledání bodů podezřelých z extrémů. Pro funkci

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

dostáváme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y + 4x$$

Extrémy mají nulové parciální derivace, tedy

$$4x^3 - 4x + 4y = 0 \quad 4y^3 - 4y + 4x = 0$$

Vyřešením rovnic dostáváme podezřelé body, které musíme dále prověřit.

2.2 Totální diferenciál

Nespojitá funkce f může mít po souřadnicích všechny parciální derivace v každém bodě, to však ale neimplikuje spojitost. **Existence parciálních derivací neimplikuje spojitost!** Budeme potřebovat něco silnějšího. Připomeňme si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací:

Tvrzení (Ekvivalentní definice derivace): *Funkce f má v bodě x derivaci $\iff$ existuje μ konvergující k 0 při $h \rightarrow 0$ a A takové, že*

$$f(x+h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

Intuice: $Ah + f(x)$ vyjadřuje tečnu ke grafu v bodě $(x, f(x))$ a $|h| \cdot \mu(h)$ je malá chyba¹, která je poměrově menší než $|h|$, pro $h \rightarrow 0$. Mysleme podobně o funkci $f(x, y)$ a uvažujme plochu:

$$S = \{(t, u, f(t, u)) : (t, u) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímk k S v bodě $(x, y, f(x, y))$, ale **ne tečnou rovinu**, která teprve bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

2.2.1 Definice totálního diferenciálu

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$ (místo absolutní hodnoty) definujeme $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$. h bude n -tice blízka nule.

Definice (Totální diferenciál): Funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$, existuje-li funkce μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$ a čísla $A_1, \dots, A_n$ pro která

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h}).$$

S použitím skalárního součinu jde též zapsat jako

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{A}\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h})$$

2.2.2 Věty o totálním diferenciálu

Tvrzení (Spojitosť, parciální derivace a totální diferenciál): *Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Potom platí:*

1. f je spojitá v $\mathbf{a}$,
2. f má všechny parciální derivace v $\mathbf{a}$, a to s hodnotami

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

Důkaz:

1. Máme (dosazením do rovnice TD)

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| + |\mu(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

a limita na pravé straně pro $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ je 0.

2. Máme (dosazením do rovnice TD)

$$\frac{1}{h}(f(\dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots)) = A_k + \mu(\dots, 0, h, 0, \dots) \frac{\|(0, \dots, h, \dots, 0)\|}{h},$$

a limita na pravé straně je zřejmě A_k .

¹Je zajímavé si rozmyslet, proč vlastně násobíme $|h|$ (jaké funkce budou mít derivace tam, kde by neměly).

□

Ted' již spojitost dostaneme. Vidíme, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě $\mathbf{a}$ a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě. V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní. Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamená, *existence spojitých parciálních derivací* je něco úplně jiného.

Věta (Spojité parciální derivace a totální diferenciál): *Nechť má f spojité parciální derivace v okolí bodu $\mathbf{a}$. Potom má v $\mathbf{a}$ totální diferenciál.*

Důkaz: Buď

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}, \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, \dots, h_n), \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, \dots, h_n) \text{ atp.}$$

(takže $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{0}$). Potom máme

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty 2.4 existují $0 \leq \Theta_k \leq 1$ takové, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, a_{k+2} + h_{k+2}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$

Položíme

$$\mu(\mathbf{h}) = \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \\ 0 \text{ pokud } \mathbf{h} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Jelikož $\left| \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \leq 1$ a jelikož jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \mu(\mathbf{h}) = 0$. □

Důsledek: Můžeme tedy schematicky psát **spojité PD** $\implies$ **TD** $\implies$ **PD**.

2.3 Počítání parciálních derivací

Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady totiž obyčejnými derivacemi jsou). Trochu jinak tomu je u pravidla pro skládání. Pro derivace jedné proměnné se dokazuje z formule

$$f(a + h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h)$$

tedy z diferenciálu (který je pro ně totéž jako existence derivace). Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě následuje.

2.3.1 Složené funkce

Věta (Derivace složených funkcí více proměnných): *Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Nechť mají $g_k(t)$ derivace v bodě b a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Položme*

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t)).$$

Potom má F derivaci v b , totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g'_k(b).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b))) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}. \end{aligned}$$

Máme $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) = 0$ jelikož jsou funkce g_k spojité v b . Jelikož funkce g_k mají derivace, jsou $\max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}$ omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita poslední sčítance je tedy nula a máme

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g'_k(b) \end{aligned}$$

Kde v poslední rovnosti využíváme tvrzení 2.2.2, díky kterému $A_k = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k}$. □

Intuice: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce f nemá žádný důvod preferovat hlavní osy, v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

Věta (Řetízkové Pravidlo): *Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Nechť mají funkce $g_k(t_1, \dots, t_r)$ parciální derivace v $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$ a nechť je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Potom má funkce*

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v $\mathbf{b}$, a platí

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Důkaz: Skládali jsme

$$\mathbb{E}_r \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Skládejme místo f m -tici funkcí $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, tedy $\mathbf{f} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$

$$\mathbb{E}_r \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{E}_m$$

Pravidlo z předchozí věty dá tedy

$$\frac{\partial (f_i \circ \mathbf{g})(b)}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

□

Poznámka: Zavedeme-li matice $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right)_{ik}$ je $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$ (napravo násobení matic), a tak to má být. $D\mathbf{h}$ je matice lineární aproximace funkce $\mathbf{h}$: *lineární aproximace se skládají spolu s aproximovanými funkcemi.*

2.3.2 Násobení

$$f(u, v) = u \cdot v$$

Potom $\frac{\partial f}{\partial u} = v$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = u$ a pro $u = \psi(x)$ a $v = \phi(x)$ platí:

$$(\phi(x)\psi(x))' = \frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x) = \phi(x)\psi'(x) + \phi'(x)\psi(x)$$

2.3.3 Dělení

$$f(u, v) = \frac{u}{v}$$

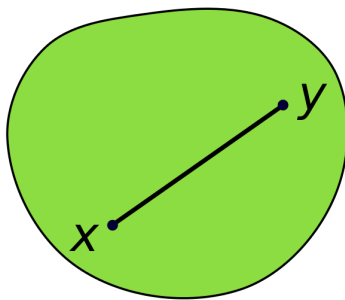
Potom $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$ a pro $u = \psi(x)$ a $v = \phi(x)$ platí:

$$\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right)' = \frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x) - \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x) = \frac{1}{\psi(x)}\phi'(x) + \frac{\phi(x)}{\psi(x)^2}\psi'(x) = \frac{\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}$$

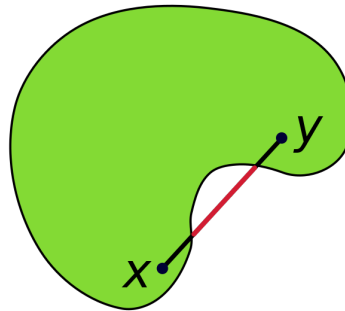
2.4 Lagrangeovy věty

Definice (Konvexní množina): Podmnožina $U \subseteq \mathbb{E}_n$ je konvexní, pokud

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \quad \implies \quad \forall t, 0 \leq t \leq 1, (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in U$$



(a) Konvexní



(b) Nekonvexní

Obrázek 4: Příklad konvexní a nekonvexní podmnožiny $\mathbb{E}_n$

Věta (Lagrangeova věta v jedné proměnné): *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a má na (a, b) derivaci. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ t. ž. tečna v bodě c je rovná přímce procházející $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$:*

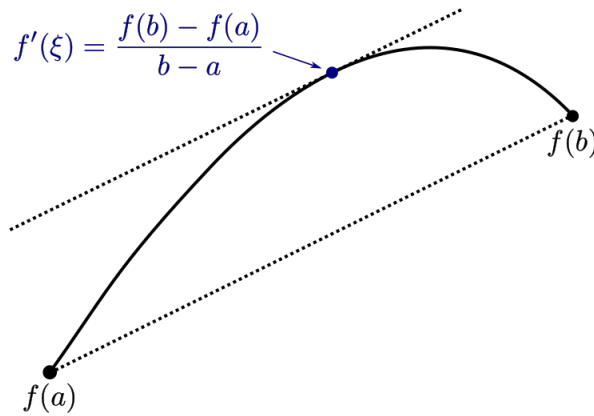
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{nebo ekvivalentně} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Věta (Lagrangeova věta ve více proměnných): *Nechť má f spojitě parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom pro libovolné dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ $\exists \theta \leq 1$ takové, že:*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

nebo ekvivalentně jako

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{c})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$



Obrázek 5: Geometrický význam Lagrangeovy věty v jedné proměnné.

kde $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ (konvexní kombinace $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) a

$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

je **gradient** funkce f .

Intuice: Jedná se o přímočaré zobecnění Lagrangeovy věty pro více proměnných, kde derivaci zobecnujeme gradientem (geometricky opět vektor tečné nadroviny v daném bodě) a skalárním součinem.

Důkaz: Položme $F(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ a $\mathbf{g}$ t. ž. $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$. Potom máme $F(t) = f \circ \mathbf{g} = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ a

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} g'_j(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

Podle Lagrangeovy věty $\exists \theta : 0 \leq \theta \leq 1$ a díky tomu, že $f(\mathbf{x}) = F(0)$ a $f(\mathbf{y}) = F(1)$ dostáváme:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0) = F'(\theta)$$

□

Poznámka: Často se užívá v tomto tvaru (porovnej s formulí pro totální diferenciál):

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} h_j$$

2.5 Záměnnost pořadí při parciálních derivacích

Tvrzení (O záměnnosti): Mějme funkci $f(x, y)$ takovou, že existují parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, které jsou spojité v nějakém okolí bodu (x, y) . Potom:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Důkaz: Pokusíme se spočítat obě derivace v jednom kroku, tedy počítejme limitu $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ funkce

$$F(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned}\varphi_h(y) &= f(x+h, y) - f(x, y) \text{ a} \\ \psi_h(x) &= f(x, y+h) - f(x, y),\end{aligned}$$

dostaneme pro $F(h)$ dva výrazy:

$$\begin{aligned}F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) \\ F(h) &= \frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x)).\end{aligned}$$

První: Funkce φ_h má derivaci (podle y , jinou proměnnou nemá)

$$\varphi'_h(y) = \frac{\partial f(x+h, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

a tedy podle Lagrangeovy věty 2.4 (druhý tvar, rozdíl je $y+h-y=h$):

$$\begin{aligned}F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) = \frac{1}{h} \varphi'_h(y + \theta_1 h) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f(x+h, y + \theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y + \theta_1 h)}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Potom znovu podle Lagrangeovy věty

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x + \theta_2 h, y + \theta_1 h)}{\partial y} \right)$$

pro nějaká θ_1, θ_2 mezi 0 a 1. Druhá, $\frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x))$ dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x + \theta_4 h, y + \theta_3 h)}{\partial x} \right)$$

Obě $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ a $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ jsou spojité (x, y) , a $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ můžeme počítat z kteréhokoli výrazu (první nebo druhá):

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

□

Důsledek: Nechť má funkce f v proměnných spojité parciální derivace do řádu k . Potom hodnoty těchto derivací záleží pouze na tom, kolikrát bylo derivováno v každé z proměnných $x_1, \dots, x_n$. Tedy za daných předpokladů můžeme obecné parciální derivace řádu $r \leq k$ psát

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} \text{ kde } r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

($r_j = 0$ indukují absenci symbolu ∂x_j)

2.6 Věta o konvergentní podposloupnosti

Věta (Konvergentní podposloupnost na kompaktním intervalu): *Mějme $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall n : a \leq x_n \leq b$. Potom existuje podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ která konverguje v $\mathbb{R}$ a platí $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$*

Důkaz: Vezměme

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$$

M je neprázdná a omezená protože $a \in M$ a b je horní mez M . Musí tedy existovat $s = \sup(M)$ a platí $a \leq s \leq b$. Dále, pro každé n je množina

$$K(n) = \left\{ k : s - \frac{1}{n} < x_k < s + \frac{1}{n} \right\}$$

nekonečná: skutečně, máme $x > s - \varepsilon$ takové, že $x_n > x$ pro nekonečně mnoho n , zatím co podle definice množiny M je jen konečně mnoho n takových, že $x_n \geq s + \varepsilon$. Zvolme k_1 tak, aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1.$$

Mějme zvolena $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ taková, že $j = 1, \dots, n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož $K(n+1)$ je nekonečná, můžeme zvolit $k_{n+1} > k_n$ tak, aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost $(x_{k_n})_n$ naší $(x_n)_n$ zřejmě konverguje k s . □

3 Kompaktní prostory

Definice (Kompaktní metrický prostor): Metrický prostor (X, d) je kompaktní, pokud každá posloupnost v něm obsahuje konvergentní podposloupnost.

3.1 Vlastnosti kompaktních prostorů

Tvrzení (Podprostor kompaktního prostoru): *Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.*

Důkaz:

- $\Leftarrow$ Buď Y uzavřený podprostor kompaktního X a buď $(y_n)_n$ posloupnost v Y . Jako posloupnost v X má konvergentní podposloupnost s limitou a z uzavřenosti je konvergentní podposloupností a tato limita je v Y .
- $\Rightarrow$ Necht' Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $y = \lim_n y_n \notin Y$. Potom $(y_n)_n$ nemůže mít podposloupnost konvergentní v Y protože každá její podposloupnost konverguje k y .

□

Tvrzení (Uzavřenost kompaktního podprostoru): *Buď (X, d) libovolný metrický prostor a buď podprostor $Y \subseteq X$ kompaktní. Potom Y je uzavřený v (X, d) .*

Důkaz: Nechť $(y_n)_n$ posloupnost v Y konverguje v X k limitě y . Potom každá podposloupnost $(y_n)_n$ konverguje k y a tedy je $y \in Y$. $\square$

Věta (Součin kompaktních prostorů): *Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz: Stačí dokázat pro součin dvou prostorů (součin prostorů je komutativní). Buďte $(X, d_1), (X, d_2)$ kompaktní a buď $((x_n, y_n))_n$ posloupnost v $X \times Y$. Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ a konvergentní podposloupnost $(y_{k_n})_n$ posloupnosti $(y_n)_n$. Potom je

$$((x_{k_n}, y_{k_n}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti $((x_n, y_n))_n$. $\square$

3.2 Omezené metrické prostory

Definice (Omezený metrický prostor): Metrický prostor (X, d) je omezený, jestliže pro nějaké K platí

$$\forall x, y \in X : d(x, y) < K.$$

Tvrzení (Omezenost kompaktního prostoru): *Každý kompaktní prostor je omezený.*

Důkaz: Zvolme x_1 libovolně a x_n tak, aby $d(x_1, x_n) > n$. Posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost; kdyby x byla limita takové podposloupnosti, bylo by pro dost velké n nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k x_1 než $d(x_1, x_n) + 1$, což je spor. $\square$

3.3 Euklidovské metrické prostory

Poznámka: Kompaktní interval v $\mathbb{E}_n$: součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$.

Věta (Kompaktnost podprostoru $\mathbb{E}$): *Podprostor euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.*

Důkaz:

$\Rightarrow$: Že je uzavřený a omezený už víme (3.1, 3.2).

$\Leftarrow$: Buď nyní $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, tak pro dostatečně velký kompaktní interval platí

$$Y \subseteq J^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

J^n je kompaktní jako součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$, a jelikož je Y uzavřený v $\mathbb{E}_n$ je též uzavřený v J^n a tedy kompaktní. $\square$

3.4 Spojitá zobrazení

Tvrzení (Obraz spojitého zobrazení na kompaktním prostoru): *Buď $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ spojitě zobrazení a buď $A \subseteq X$ kompaktní. Potom je $f[A]$ kompaktní.*

Důkaz: Buď $(y_n)_n$ posloupnost v $f[A]$. Zvolme $x_n \in A$ tak, aby $y_n = f(x_n)$. Buď $(x_{k_n})_n$ konvergentní podposloupnost. Potom je $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$ konvergentní podposloupnost $(x_n)_n$. $\square$

Tvrzení (Extrémy spojitě funkce na kompaktním prostoru): *Buď (X, d) kompaktní. Potom každá spojitá funkce $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá maxima i minima (t.j. nejsou nekonečné).*

Důkaz: Buď $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní. Je to tedy omezená množina a musí mít supremum $M \in \mathbb{R}$ a infimum $m \in \mathbb{R}$. Zřejmě máme $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$ a jelikož Y je uzavřená, $m, M \in Y$. Víme, že spojitá f je charakterizována tím, že všechny vzory uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní vidíme, že je-li definiční obor kompaktní, platí též, že obrazy uzavřených podmnožin jsou uzavřené. $\square$

Věta (Vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení): *Je-li (X, d) kompaktní a je-li $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení, pak je f homeomorfismus.*²

Důkaz: Buď B uzavřená v Z . Potom je $A = g^{-1}[B]$ uzavřená $\implies$ kompaktnost v $X \implies f[A]$ je kompaktní $\implies$ uzavřená v Y . Jelikož je f zobrazení na, máme $f[f^{-1}[C]] = C \ \forall C$. Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

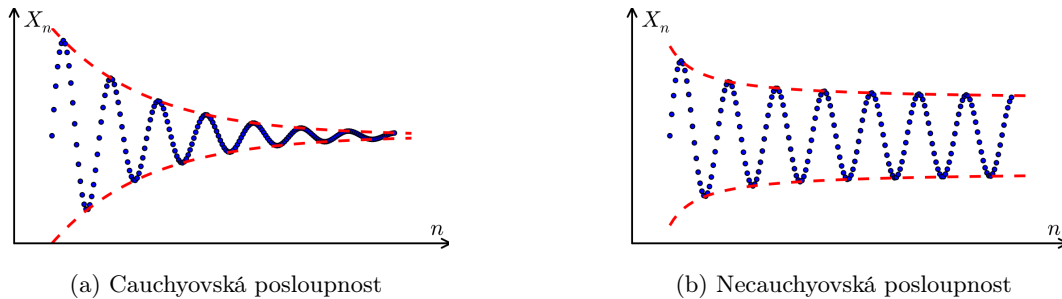
uzavřená. $\square$

3.5 Cauchyovské posloupnosti

Definice (Cauchyovská posloupnost): Posloupnost $(x_n)_n$ v (X, d) je Cauchyovská, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Intuice: Vlastnost popisuje posloupnost, jejíž prvky se k sobě dostávají libovolně blízko (tj. pro každou vzdálenost ε je jen konečně mnoho prvků od sebe dál než ε). Jelikož se prvky posloupnosti k sobě dostávají libovolně blízko, tak „chce“ k něčemu konvergovat, ale to něco *nemusí být v prostoru, ve kterém posloupnost uvažujeme*. Například posloupnost $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \dots\}$ v $\mathbb{Q}$ nekonverguje.



Obrázek 6: Příklady cauchyovské a necauchyovské posloupnosti

Tvrzení (Konvergence cauchyovské posloupnosti): *Nechť má cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom posloupnost konverguje k limitě podposloupnosti.*

Důkaz: Nechť je $(x_n)_n$ cauchyovská posloupnost, $(x_{k_n})_n$ její podposloupnost a nechť $\lim_n(x_{k_n}) = x$. Buď $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pro $\forall m, n \geq n_1$ a $d(x_{k_n}, x) \leq \varepsilon$ pro $\forall n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max(n_1, n_2)$, máme pro $\forall n \geq n_0$ (protože $k_n \geq n$)

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\varepsilon.$$

V první nerovnosti využíváme trojúhelníkovou nerovnost metriky. $\square$

Tvrzení (Cauchyovská posloupnost součinu): *Posloupnost $(x_1^1, \dots, x_n^1), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$ je cauchyovská v $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ právě když každá z posloupností $(x_i^k)_k$ je cauchyovská v (X_i, d_i) .*

²Obecněji: Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojitá a na. Mějme potom $g : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$ spojitá a $h : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$ takové, že $h \circ f = g$. Potom je h spojitá.

Důkaz:

$\Rightarrow$: Plyne bezprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$.

$\Leftarrow$: Necht' je každá $(x_i^k)_k$ cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ a i zvolme k_i tak, aby pro $k, l \geq k_i$ bylo $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$.
Potom pro $k, l \geq \max_i k_i$ máme

$$d((x_1^k, \dots, x_n^k), (x_1^l, \dots, x_n^l)) < \varepsilon.$$

□

3.6 Úplné metrické prostory

Definice: Metrický prostor (X, d) je úplný, pokud v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Věta (Součin úplných prostorů): *Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně, $\mathbb{E}_n$ je úplný.*

Tvrzení (Úplnost podprostoru): *Podprostor úplného prostoru je úplný, právě když je uzavřený.*

Důkaz:

$\Leftarrow$ Bud' $Y \subseteq (X, d)$ uzavřený. Bud' $(y_n)_n$ cauchyovská v Y . Potom je cauchyovská a tedy konvergentní v X a kvůli uzavřenosti je limita v Y .

$\neg \Leftarrow \neg$ Necht' Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $\lim_n y_n \notin Y$. Potom je $(y_n)_n$ cauchyovská v X a jelikož je vzálenost stejná, též v Y . Ale v Y nekonverguje.

□

Důsledek: Podprostor Y euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je úplný, právě když je uzavřený.

Tvrzení (Úplnost kompaktního prostoru): *Každý kompaktní prostor je úplný.*

Důkaz: Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje. □

4 Implicitní funkce

Příklad: Mějme $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, neboli rovnici $x^2 + y^2 = 1$:

- Pro některá x_0 jako například $x_0 < -1$ řešení neexistuje, o funkci $y(x)$ nemluvě.
- Přestože řešení v nějakém okolí x_0 existuje, nemůžeme v nějakých situacích hovořit o funkci. Potřebujeme kolem řešení (x_0, y_0) vymezit okolí jak x_0 , tak y_0 .
- Máme také případy, jako ten, kdy $x_0 = 1$, kde je v okolí mnoho řešení, ale žádný (ani jednostranný) interval, kde by y bylo jednoznačné.

V případě $F(x, y)$ už žádná další situace nenastane.

Příklad (Obecný): Mějme spojitě reálné funkce $F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ v $n + m$ proměnných. Určuje systém rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned}$$

v nějakém smyslu funkce

$$f_i \equiv y_i(x_1, \dots, x_m)$$

pro $i \in \{1, \dots, n\}$? Pokud ano, jak a kde je určuje a jaké mají funkce vlastnosti?

Intuice: 3b1b má na svém YouTube o úvodu do implicitních funkcí hezké video [odkaz].

4.1 Věty o implicitní funkci

Věta: Buď $F(x, y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) . Nechť má F spojitě parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť platí:

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$\left| \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \right| \neq 0$$

Potom $\exists \delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists! y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) : F(x, y) = 0$. Dále, označíme-li toto jediné y jako $y = f(x)$, potom získaná $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě derivace do řádu k .

Důkaz: Buď třeba

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} > 0$$

Vzhledem ke spojitosti existují $\delta_1, \Delta > 0$ taková, že v obdélníku $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle \times \langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ stále kladná. Tento obdélník je kompaktní, tedy na něm spojitě funkce nabývají extrémů a tedy $\exists a, A > 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > a, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| < A$$

Vezměme funkci $\varphi(y) = F(x_0, y)$. Ta má kladnou derivaci a tedy roste na intervalu $\langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$. Jelikož $\varphi(y_0) = 0$, je $F(x_0, y_0 - \Delta) = \varphi(y_0 - \Delta) < 0$ a $F(x_0, y_0 + \Delta) > 0$. Jelikož funkce F je spojitá (má spojitě parciální derivace a tedy i totální diferenciál), existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, y_0 - \Delta) < 0$ a $F(x, y_0 + \Delta) > 0$ pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pro taková x položme $\varphi_x(y) = F(x, y)$. Máme vždy $\varphi'_x(y) > 0$ na celém $\langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$, takže je tam každá z těchto funkcí rostoucí a ovšem spojitá. Jelikož $\varphi_x(y_0 - \Delta) < 0 < \varphi_x(y_0 + \Delta)$, nabývá $F(x, y) = \varphi_x(y)$, v intervalu $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ nuly v právě jednom bodě y . Označme toto y jako $f(x)$.

Zatím však ani nevíme, zda je f spojitá. Pojďme odvodit vlastnosti f .

$$0 = F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x))$$

$$= \frac{\partial F(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{\partial x} \cdot h$$

$$+ \frac{\partial F(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{\partial y} \cdot (f(x + h) - f(x))$$

První rovnost platí, protože $F(t, f(t)) = 0$. Druhá rovnost platí z Lagrangeovy věty ve tvaru $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} h_j$, kde dosadíme $\mathbf{h} = (h, f(x + h) - f(x))$.

Upravíme

$$f(x + h) - f(x) = -h \cdot \frac{\frac{\partial F(\dots)}{\partial x}}{\frac{\partial F(\dots)}{\partial y}}$$

Podle výše získaných nerovností s a a A tedy $|f(x + h) - f(x)| < |h| \cdot \frac{A}{a}$ a f je tedy spojitě v bodě x . Vráťme se ještě jednou k $f(x + h) - f(x)$ a dostaneme

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = - \left(\frac{\partial F(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(\dots, \dots)}{\partial x}$$

Nyní již ale víme, že f je spojitá, a spojitost $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$ byla v předpokladech. Tedy má pravá strana limitu pro $h \rightarrow 0$ a dostáváme (dle věty o konvergenci můžeme dosadit $h = 0$)

$$f'(x) = - \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

Tuto formuli můžeme nyní derivovat tak dlouho, jak to existence PD na pravé straně dovolí. $\square$

Definice (Jacobiho determinant): Pro konečnou posloupnost funkcí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m))$$

a pro $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ se definuje Jacobiho determinant (Jakobián) jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})} = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$

Intuice: Stejně jako determinant v lineární algebře určuje, jak daná matice transformuje prostor (natahuje vektory v daných směrech), tak Jacobiho matice určuje, jak vektorová funkce $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ při transformaci oblasti $U \subseteq E_n$ na $\mathbf{f}[U]$ natahuje nebo stlačuje objemy malých kousků oblasti U okolo $\mathbf{x}$ v poměru (absolutní hodnoty) Jakobiánu.

Poznámka: 3b1b má o Jakobiánu na KhanAcademy super video [odkaz].

Věta: Budťe $F_i(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m)$ pro $i \in 1, \dots, m$ funkce $n + m$ proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu $k \geq 1$. Budť

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &= \mathbf{o} \\ \frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Potom existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že pro každé

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \dots \times (y_m^0 - \Delta, y_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Intuice: Místo důkazu si rozmysleme jednoduchý případ použití věty. Uvažujme dvojici rovnic

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, y_1, y_2) &= 0, \\ F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) &= 0 \end{aligned}$$

a pokusme se najít řešení $y_i = f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2$, v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$. Aplikujme větu o jedné rovnici. Mysleme o druhé z rovnic jako o rovnici pro y_2 ; v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$ získáme y_2 jako funkci $\psi(\mathbf{x}, y_1)$. Substituuje ji do první rovnice, což dá

$$G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, \psi(\mathbf{x}, y_1))$$

a řešení $y_1 = f_1(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0)$ může být substituováno do ψ a získáme $y_2 = f_2(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}))$.

Co jsme vlastně předpokládali:

- Spojité parciální derivace funkcí F_i
- $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$
- Konečně jsme potřebovali (použijte řetízkové pravidlo) $\frac{\partial G}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, y_1^0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \neq 0$ (*)

Užijme formuli, kterou již máme (z důkazů jednoduché verze věty)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = - \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial y_1}$$

což transformuje (*) na

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \right) \neq 0$$

to jest,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \right) \neq 0$$

To je vzorec, který známe, totiž determinant. Takže jsme vlastně předpokládali, že

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j} \neq 0$$

A tato podmínka již stačí: není-li determinant nula, je *bud'*

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

a/nebo

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

Platí-li tedy to druhé, můžeme začít řešením rovnice $F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0$ pro y_1 místo y_2 .

5 Vázané extrémy

Věta (O hledání extrému funkcí s vazbami): *Budte $f, g_1, \dots, g_k$ reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Necht' mají spojité parciální derivace. Necht' je hodnota matice*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy $k \leq n$, v každém bodě oboru D .

Jestliže funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami

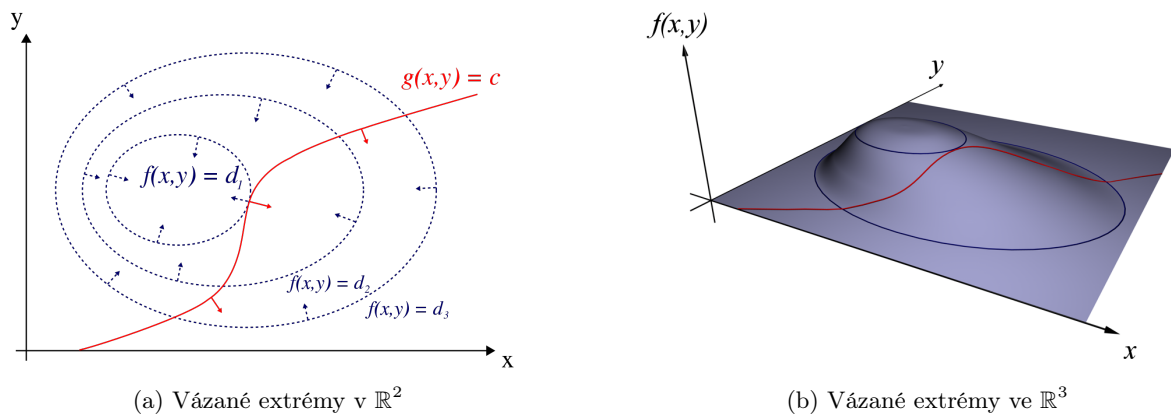
$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že $\forall i \in 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$$

nebo ekvivalentně přes gradienty jako

$$\nabla f(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla g(\mathbf{a}) = 0$$



Obrázek 7: Geometrický náhled na počítání vázaných extrémů.

Intuice: Je-li extrém na hranici vazby, tak parciální derivace funkce v daném bodě budou nějaký násobek parciálních derivací funkce (budou se „dotýkat“) (viz 7). Koeficientům λ_i , který určují tento násobek, se říká **Lagrangeovy multiplikátory**.

Intuice: Uvažme funkci $f(x, y) = 2x + y$ s omezením $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Jelikož funkce splňuje předpoklady věty o hledání extrému funkcí, tak můžeme přes Lagrangeovy multiplikátory najít body podezřelé z extrémů. Spočítejme je dosazením do definice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^k -\lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} &= -\lambda_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= -\lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

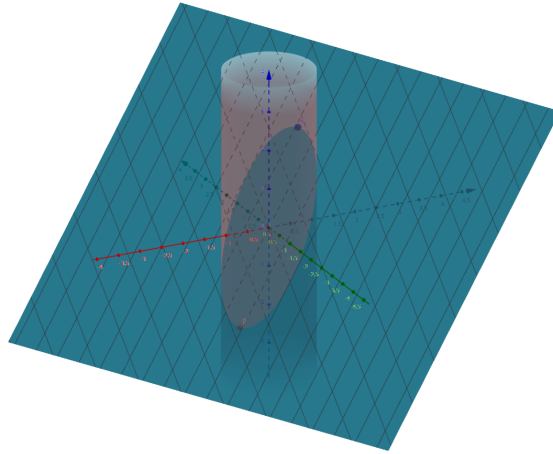
Z toho vyplývá, že hledáme body, které splňují následující rovnice:

$$\begin{aligned} 2x\lambda &= -2 \\ y\lambda &= -1 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Jejich vyřešením (3 rovnice, 3 proměnné) dostáváme dvě řešení $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ a $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$, které jsou minimum a maximum (viz obrázek 8).

Důkaz: Matice M má hodnotu k právě když aspoň jedna její $k \times k$ podmatice M je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu,

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$



Obrázek 8: Geometrický pohled na řešený příklad: f je modrá, g červená a extrémy jsou dva viditelné body (maximum modré, minimum červené). Vygenerováno přes GeoGebbru [odkaz].

Potom podle věty o implicitních funkcích máme okolí bodu $\mathbf{a}$ funkce $\phi_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi takové, že (píšme $\tilde{\mathbf{x}}$ pro $(x_{k+1}, \dots, x_n)$)

$$g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, k.$$

tedy lokální maximum nebo minimum funkce $f(\mathbf{x})$ v $\mathbf{a}$ podmíněné danými vazbami dává lokální maximum či minimum (nepodmíněné) funkce

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}),$$

v $\tilde{\mathbf{a}}$, a tedy je

$$\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i = k+1, \dots, n,$$

to jest, podle řetízkového pravidla

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

čili

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = - \sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

Podobně, derivováním konstantní $g_j(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0$ dostaneme pro $j = 1, \dots, k$

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

čili

$$\frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = - \sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

Dále použijeme znovu vlastnost toho, že determinant je nenulový. Vzhledem k hodnotě matice má systém lineárních rovnic

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, k$$

jediné řešení $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. To jsou rovnosti z tvrzení, ale jen pro $i \leq k$. Musíme ještě dokázat, že to platí i pro $i > k$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \\ &= - \sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\ &= - \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \right) \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\ &= - \sum_{r=1}^k 0 \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

□

5.1 Regulární zobrazení

Definice (Regulární zobrazení): Buď $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a nechť mají f_i pro $i \in 1, \dots, n$ spojitě parciální derivace. Výsledné zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{E}_n$$

je regulární, jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in U : \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

Intuice: Regularita je zobecnění pojmu prostého zobrazení pro vícerozměrná zobrazení.

Tvrzení (Obraz regulární funkce): Je-li $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ regulární, je obraz $\mathbf{f}[V]$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq U$ otevřený.

Důkaz: Vezměme $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$. Definujeme $\mathbf{F} : V \times \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ předpisem

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i.$$

Potom je $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ a $\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{x})} \neq 0$, a tedy můžeme použít větu o IF a dostaneme $\delta > 0$ a $\Delta > 0 : \forall \mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta \exists \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$ a $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0$. To znamená, že máme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (pozor, y_i jsou zde proměnné, x_j hledané funkce a

$$\Omega(\mathbf{y}^0, \delta) = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta\} \subseteq \mathbf{f}[V].$$

□

Tvrzení (Inverz regulárního zobrazení): Buď $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ regulární zobrazení. Potom $\forall \mathbf{x}^0 \in U \exists$ otevřené okolí V takové, že restrikce $\mathbf{f}|_V$ je bijekce. Navíc, zobrazení $\mathbf{g} : \mathbf{f}[V] \rightarrow \mathbb{E}_n$ inverzní k $\mathbf{f}|_V$ je regulární.

Důkaz: Znovu použijeme zobrazení $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$, kde $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i$. Pro dost malé $\Delta > 0$ máme právě jedno $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ takové, že $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$. Toto $\mathbf{g}$ má navíc spojitě parciální derivace. Máme

$$D(id) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) \cdot D(\mathbf{g}).$$

Podle řetízkového pravidla (a věty o násobení determinantů) je

$$\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})} = \det D(\mathbf{f}) \cdot \det D(\mathbf{g}) = 1$$

a tedy je pro každé $y \in f[V] : \frac{D(g)}{D(y)}(y) \neq 0$. $\square$

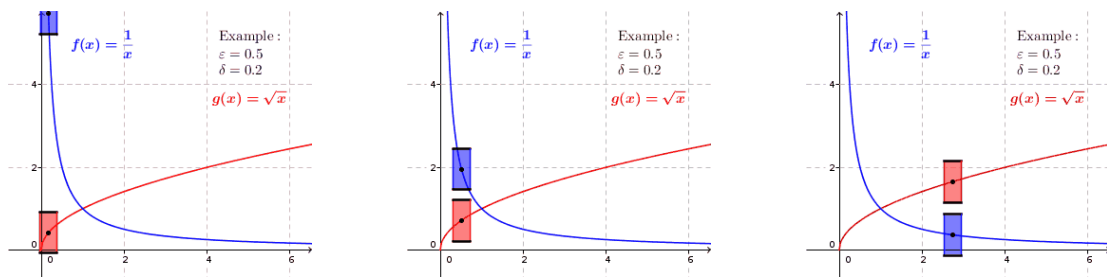
Důsledek: Prosté regulární zobrazení $f : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ má regulární inverzi $g : f[U] \rightarrow \mathbb{E}_n$

6 Stejnoměrná spojitost

Definice (Stejnoměrná spojitost): Řekneme, že $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y : d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Intuice: Geometrický význam je ten, že pro libovolnou vzdálenost ε v y existuje δ t. ž. okénko o velikosti (δ, ε) umístěné do libovolného místa v grafu není grafem protnuto nahoře ani dole. Na obrázku 9 je vidět, že funkce $\sqrt{x}$ stejnosměrnou spojitost splňuje, kdežto funkce $\frac{1}{x}$ nikoliv.



Obrázek 9: Geometrický význam stejnosměrné spojitosti pro $f(x) = 1/x$ a $g(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $\mathbb{R}^+$.

V porovnání s definicí normální spojitosti je rozdíl v pozici kvantifikátorů $\forall x, y$ (v definici spojitosti jsou na úplném začátku). To odpovídá tomu, že pro spojitost požadujeme okénko pouze **pro jeden bod** a ne pro celou funkci, jak je tomu u stejnoměrné spojitosti.

Věta (Spojitost zobrazení na kompaktním prostoru): Je-li (X, d) kompaktní, je každé spojitě $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ stejnoměrně spojitě. Zejména to platí pro spojitě reálné funkce na kompaktních intervalech.

Důkaz: Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ není stejnoměrně spojitě. Potom $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \exists x_n, y_n :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

ale

$$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$. Označme $a = \lim_n x_{k_n}$. Potom podle $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ je též $a = \lim_n y_{k_n}$. Podle $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ nemůže být $f(a) = \lim_n f(x_{k_n})$ a zároveň $f(a) = \lim_n f(y_{k_n})$, a tedy f není ani spojitě. $\square$

7 Objemy a obsahy

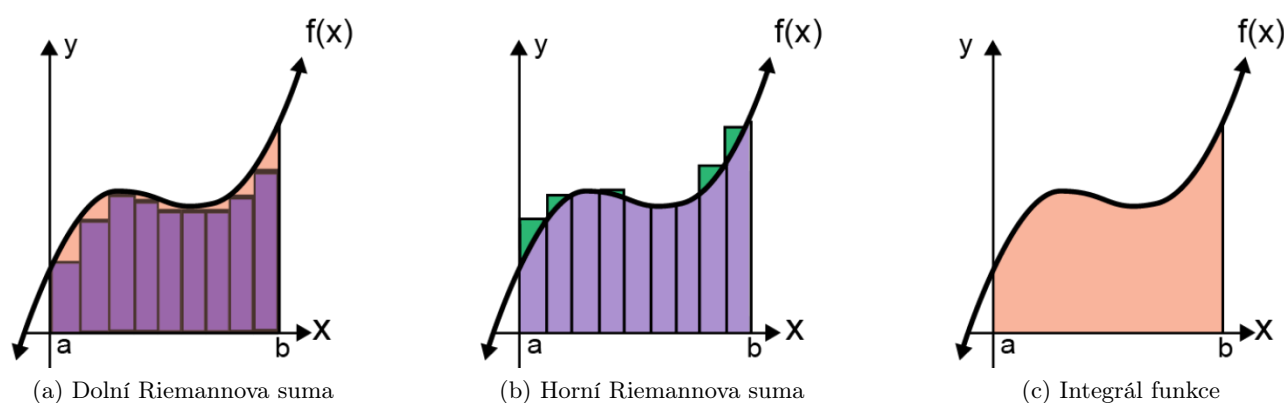
Pro zbytek sekce $A \subseteq \mathbb{E}_m$ (speciálně $\mathbb{E}_2$)

7.1 Vlastnosti

- $A \subseteq B \implies \text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\implies \text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$

- **vol** je zachován isometrií (zobrazením zachovávající vzdálenosti)
- V $\mathbb{E}_2$: $\text{vol}(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
- V $\mathbb{E}_n$: $\text{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$
- $\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B)$.
 - pokud jsou všechny definované
 - $\text{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) \implies$ princip inkluze a exkluze

8 Opakování Riemannova integrálu v jedné proměnné



Obrázek 10: Geometrický význam Riemannova integrálů jedné proměnné.

Definice (Rozdělení) intervalu $\langle a, b \rangle$ je posloupnost

$$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Definice (Zjemnění) rozkladu P je rozklad P' takový, že

$$P' : a = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_{m-1} < t'_m = b$$

$$\text{kde } \{t_j : j = 1, \dots, n-1\} \subseteq \{t'_j : j = 1, \dots, m-1\}.$$

Definice (Jemnost) rozkladu P je

$$\mu(P) = \max_j (t_j - t_{j-1}).$$

Definice (Horní/dolní součty): Pro omezenou $f : J = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a P definujeme dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) \text{ resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, M_j = \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

Tvrzení (Vlastnosti součtů):

- Pokud P' zjemňuje P dostáváme

$$s(f, P) \leq s(f, P') \text{ a } S(f, P) \geq S(f, P')$$

- Pro každá dvě P_1, P_2 je

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Definice ((Horní/dolní) Riemannův integrál) f přes $\langle a, b \rangle$ jsou výrazy:

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ rozdělení}\} \quad \text{a} \quad \overline{\int}_a^b f(x)dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ rozdělení}\}$$

Jsou-li si rovny, mluvíme o Riemannově integrálu funkce f přes $\langle a, b \rangle$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

8.1 Existence Riemannova integrálu

Věta (Kritérium existence Riemannova integrálu): Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists$ rozdělení P takové, že

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Důkaz:

$\Rightarrow$: Necht' $\int_a^b f(x)dx$ existuje a necht' $\varepsilon > 0$. Potom existují rozdělení P_1 a P_2 takové, že

$$S(f, P_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f, P_2) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Potom platí pro společné zjemnění P těchto dvou P_1, P_2

$$S(f, P) - s(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Necht' druhé tvrzení platí. Zvolme $\varepsilon > 0 : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Potom je

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq S(f, P) < s(f, P) + \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolně malé, vidíme, že $\overline{\int}_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

□

Věta (Existence Riemannova integrálu pro spojitou funkci v $\mathbb{R}$): Pro každou spojitou $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje.

Důkaz: Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby

$$\forall x, y : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Je-li $\mu(P) < \delta$ máme $t_j - t_{j-1} < \delta$ pro všechna j , a tedy

$$\begin{aligned} M_j - m_j &= \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} - \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : t_{j-1} \leq x, y \leq t_j\} \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

takže

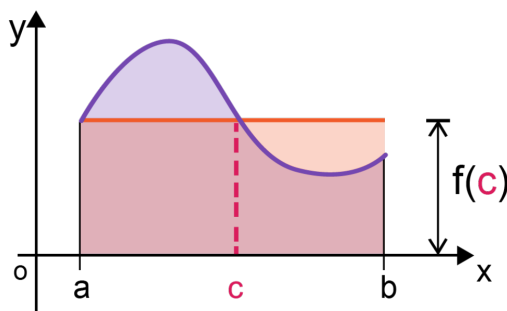
$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

8.2 Integrální věta o střední hodnotě

Věta (Integrální věta o střední hodnotě): *Bud' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ t. ž.*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



Obrázek 11: Geometrický význam integrální věty o střední hodnotě.

Důkaz: Položme $m = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ a $M = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$. Zřejmě

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Existuje tedy K takové, že $m \leq K \leq M$ a $\int_a^b f(x) dx = K(b-a)$. Jelikož f je spojitá, existuje $c \in \langle a, b \rangle$ takové, že $K = f(c)$. $\square$

8.3 Základní věta analýzy

Věta (Základní věta analýzy): *Bud' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b \rangle$ definujeme*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Potom je $F'(x) = f(x)$

Důkaz: Pro $h \neq 0$ máme

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} f(x + \theta h)h = f(x + \theta h)$$

V druhé úpravě používáme úvahu $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ a ve třetí integrální větu o střední hodnotě. $\square$

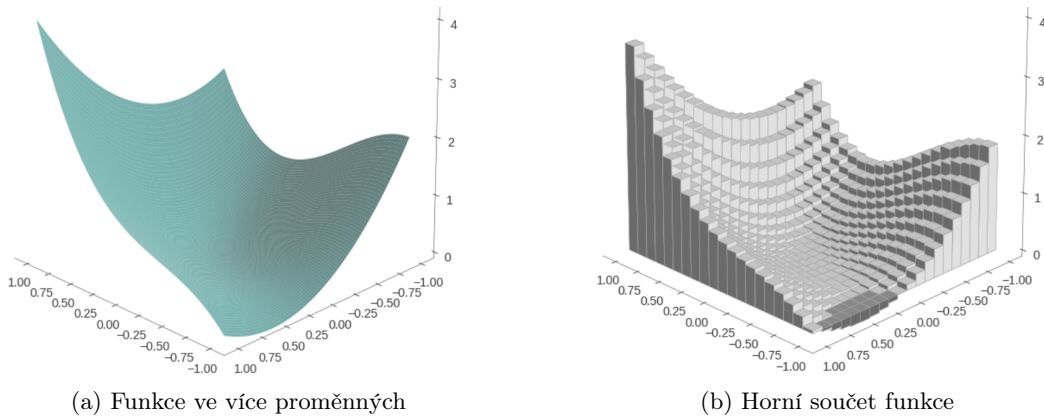
Důsledek:

1. Spojitá funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci spojitou na $\langle a, b \rangle$. Pro kteroukoli primitivní funkci G funkce f na (a, b) spojitou na $\langle a, b \rangle$ platí

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

2. Integrální věta o střední hodnotě:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a)$$



Obrázek 12: Geometrický význam Riemannova integrálů ve více proměnných.

9 Riemannův integrál ve více proměnných

9.1 Definice

Definice (n -rozměrný kompaktní interval) (v $\mathbb{E}_n$) je

$$J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

Definice (Rozdělení intervalu) J je posloupnost rozdělení $P = (P^1, \dots, P^n)$:

$$P^j : a_j = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j$$

Definice (Cihly): Intervalům

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$$

říkáme **cihly rozdělení** P a

$$\mathcal{B}(P)$$

je množina všech cihel rozdělení P . Je to skoro disjunktní rozdělení intervalu J . Různé cihly z $\mathcal{B}(P)$ se totiž setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0, díky čemuž platí:

$$\text{vol}(J) = \sum \{\text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(J)\}.$$

Definice (Průměr (diameter)) intervalu $J = \langle r_1, s_1 \rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n \rangle$ je

$$\text{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i)$$

Definice (Jemnost) rozdělení P je

$$\mu(P) = \max\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}$$

Definice (Zjemnění): Rozdělení $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$ zjemňuje rozdělení $P = (P^1, \dots, P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j . Vytváří/indukuje tak rozdělení $Q_B \forall B \in \mathcal{B}(P)$ a jistě platí

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{\mathcal{B}(Q_B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Pozorování: Každá dvě rozdělení P, Q n -rozměrného kompaktního intervalu J mají společné zjemnění.

Definice („Supremum/infimum“ na kompaktním intervalu): Je dána omezená $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu J a $B \subseteq J$ je n -rozměrný kompaktní podinterval intervalu J . Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \quad \text{a} \quad M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}.$$

Pozorování: $m(f, B) \leq M(f, B)$ a je-li $C \subseteq B$, pak

$$m(f, C) \geq m(f, B) \quad \text{a} \quad M(f, C) \leq M(f, B).$$

Definice (Horní/dolní součty): Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme

$$s_J(f, P) = \sum \{m(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\},$$

$$S_J(f, P) = \sum \{M(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Pozorování (obecné): $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená, $X = \bigcup X_i$ a $X_i = \bigcup X_{ij}$ jsou konečná skoro disjunktní sjednocení. Nechť dále (a analogicky pro m infima):

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in X_i\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in X_{ij}\}$$

Triviálně $M_{ij} \leq M_i$ (M_i je horní mez množiny $\{f(x) : x \in X_{ij}\}$), tedy:

$$\begin{aligned} \sum M_i \text{vol}(X_i) &= \sum_i M_i \sum_j \text{vol}(X_{ij}) \\ &= \sum_{ij} M_i \text{vol}(X_{ij}) \\ &\geq \sum_{ij} M_{ij} \text{vol}(X_{ij}) \end{aligned}$$

Tvrzení: Nechť Q zjemňuje P . Potom

$$s(f, Q) \geq s(f, P) \quad \text{a} \quad S(f, Q) \leq S(f, P)$$

Důkaz: Použijeme předchozí pozorování pro $\{X_i \mid i\} = \mathcal{B}(P)$, $\{X_{ij} \mid j\} = \mathcal{B}(Q_B)$ a samozřejmě i pro $\{X_{ij} \mid ij\} = \mathcal{B}(Q)$. $\square$

Tvrzení: Pro libovolná dvě rozdělení P, Q intervalu J máme $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

Důkaz: Jelikož je triviálně $s(f, P) \leq S(f, P)$, použitím společného zjemnění R rozdělení P, Q dostaneme

$$s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q).$$

$\square$

Definice ((Horní/dolní) Riemannův integrál): Množiny $\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ a $\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ jsou shora/zdola omezené (předchozí tvrzení) a můžeme definovat dolní/horní Riemannův integrál funkce f přes J jako

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\} \quad \text{a} \quad \overline{\int}_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme Riemannův integrál funkce f přes J , značíme³.

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{nebo prostě} \quad \int_J f$$

³Někdy se také značí jako $\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$ nebo $\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

9.2 Existence

Věta (Kritérium existence Riemannova integrálu): *Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že*

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon$$

Důkaz: Nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P)$$

z toho dostaneme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int}$$

pro libovolně malé ε . □

9.3 Riemannův integrál pro spojitě funkce

Věta (Riemannův integrál pro spojitě funkce): *Každá spojitá funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.*

Důkaz: V $\mathbb{E}_n$ budeme používat metriku σ definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$$

Jelikož je f stejnoměrně spojitá, můžeme pro $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)}$$

Připomeňme si jemnost $\mu(P)$. Je-li $\mu(P) < \delta$, pak je $\text{diam}(B) < \delta$ pro všechny $B \in \mathcal{B}(P)$ a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} = \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum \{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)} \sum \{\text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)} \text{vol}(J) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

9.4 Fubiniova věta

Věta (Fubiniova věta): *Vezměme součin $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ intervalů $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť existuje*

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y}$$

a nechť pro každé $\mathbf{x} \in J'$, resp. $\mathbf{y} \in J''$, existuje

$$\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \text{a} \quad \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Potom je

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{J''} \left(\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

Příklad: Ve dvou proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

Ve třech proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Obecně

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

Důkaz: Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F$$

Zvolme rozdělení P intervalu J tak, aby

$$\int f - \varepsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \int f + \varepsilon$$

Toto rozdělení je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P'' intervalu J'' . Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$$

a každá cihla P se objeví jako právě jedno $B' \times B''$. Potom je

$$F(\mathbf{x}) \leq \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'')$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F, P') &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x} \in B'} \left(\sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \right) \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B' \times B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \times B'' \in \mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z} \in B' \times B''} f(\mathbf{z}) \cdot \text{vol}(B' \times B'') = \\ &= S(f, P) \end{aligned}$$

a podobně

$$s(f, P) \leq s(F, P')$$

Máme tedy

$$\int_J f - \varepsilon \leq s(F, P') \leq \int_{J'} F \leq S(F, P') \leq \int_J f + \varepsilon$$

a $\int_{J'} F$ je roven $\int_J f$. □

9.5 Lebesgueův integrál

Riemannův integrál je intuitivně velmi uspokojivý a počítá to, co chceme, pokud tedy funguje. Jeho užití má ale několik problémů:

- Nemusí existovat i pro některé přirozeně definované funkce, nebo přinejmenším není snadno vidět, zda existuje.
- Nemůžeme provádět užitečné operace (limity, derivování) dost univerzálně.

Definice (Lebesgueův integrál) je rozšíření Riemannova integrálu, kde můžeme dělat prakticky cokoliv, za snadno zapamatelných podmínek:

1. Je-li J interval a Riemannův integrál $\int_J f$ existuje, shoduje se s Lebesgueovým.
2. Pokud $\int_{D_n} f$ existuje pro $n = 1, 2, \dots$, existuje i

$$\int_{\bigcup D_n} f$$

3. Pokud $\int_D f_n$ existuje a posloupnost $(f_n)_n$ je monotónní, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
4. Pokud $\int_D f_n$ existuje a $|f_n| \leq g$ pro nějaké g pro které existuje $\int_D g$, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
5. (Důsledek 4.) Je-li D omezená, $|f_n(x)| \leq C$ a $\int_D f_n$ existují, platí $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$
6. Buď U okolí bodu t_0 a g takové, že existují $\int_D g$ a $\int_D f(t, x) dx$ a $\forall t \in U \setminus \{t_0\} : |f(t, x)| \leq g(x)$, potom

$$\int_D f(t_0, x) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_D f(t, x) dx$$

7. Jestliže pro integrovatelnou g platí

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq g(x)$$

a v nějakém okolí U bodu t_0 všechno dává smysl(?), potom platí

$$\int_D \frac{\partial f(t_0, -)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_D f(t_0, -)$$

9.6 Tietzeova věta

Věta (Tietzeova věta): *Buď Y uzavřený podprostor metrického prostoru X . Potom můžeme každou spojitou reálnou funkci f na Y takovou, že $\forall x \in Y : a \leq f(x) \leq b$ rozšířit na stejně omezenou spojitou funkci g na X .*

The End