

Diskrétní Matematika

poznámky

Tomáš Sláma
12. 1. 2020

Toto PDF bylo automaticky vygenerováno (5. prosince 2025) z webové stránky

<https://slama.dev/poznámky/diskretni-matematika>,

která je preferovaný způsob jak dokument číst. Za případné chyby způsobené převodem se omlouvám.

Obsah

Úvodní informace	2
Relace	2
Funkce	2
Vlastnosti relace	2
Ekvivalence	2
Uspořádání	3
Dlouhý a široký	3
Počítání funkcí	4
Kombinatorika	4
Vlastnosti kombinačních čísel	5
Binomická věta	5
Odhady pro faktoriál	5
Princip inkluze/exkluze	6
Grafy	7
Odrůdy	7
Grafové odhady	7
Vlastnosti grafu	7
Grafové operace	9
Stromy	9
Kostra, sled, tahy	10
Rozšiřování grafů	11
Rovinné nakreslení grafu	11
Barvení	13
Degenerovanost, klikovost, dualita	14
Pravděpodobnost	15
Podmíněná pravděpodobnost	15
Pravděpodobnostní odhady	17

Úvodní informace

Tato stránka obsahuje moje poznámky z přednášky Martina Mareše z akademického roku 2019/2020 | MFF (MFF UK). Pokud by byla někde chyba/nejasnost, nebo byste rádi něco přidali, tak stránku můžete upravit [pull requestem](#) (případně mi dejte vědět na mail).

Relace

Definice (relace) relace mezi množinami $X, Y \equiv R \subseteq X \times Y$ (podmnožina kartézského součinu)

- prázdná: $\emptyset$ (nic s ničím)
- univerzální: $X \times Y$ (vše se vším)
- diagonální $\Delta_X: \{(x, x) \mid x \in X\}$
 - matice relace má 1 na diagonále
- inverzní $R^{-1}: \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
 - pozor: nemusí to být funkce!
- složená: $x(R \circ S)z \equiv \exists y \in Y : xRy \wedge ySz$
 - tzn. tj. musí existovat cesta (když si to představíme jako grafy)

Funkce

Definice (funkce) relace f mezi X, Y je funkce (zobrazení) $\equiv \forall x \in X \exists! y \in Y : xfy$

- speciální druh relace, ve kterém se prvek z X zobrazuje na ten z Y právě jednou na
- značíme $f : X \mapsto Y$ nebo $f(x) = y$
- **prostá**: $\forall x, x' \in X, x \neq x' : f(x) \neq f(x')$ (dvě různé x se nezobrazí na stejnou y)
- **na**: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
 - na každé y se něco zobrazí (klidně vícekrát!)
- **bijekce**: $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$
- pozn.: podle definice jdou všechny prvky z X někam do Y !

Vlastnosti relace

- **reflexivní**: $\equiv \forall x \in X : xRx$
 - diagonála
- **symetrická**: $\equiv \forall x, y \in X : xRy \iff yRx$
 - pozn.: $R^{-1} = R$
- **antisymetrická**: $\forall x, y \in X, x \neq y : xRy \implies \neg yRx$
 - alternativně: $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \implies x = y$ (je z toho lépe vidět diagonála)
 - např. menší než... musí to být pouze jedním směrem
- **tranzitivní**: $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$
 - hezky vidět na grafech, špatně na maticích

Ekvivalence

Definice (ekvivalence) Relace R na X je ekvivalence $\equiv R$ je **tranzitivní, reflexivní a symetrická**.

- ekvivalenční třída $R[x]$ prvku $x := \{y \in X \mid xRy\}$ (jsou spolu mezi sebou všechny v relaci)

Věta: Necht R je ekvivalence na X . Potom:

1. $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$
 - vyplývá z reflexivity... $x \in R[x]$

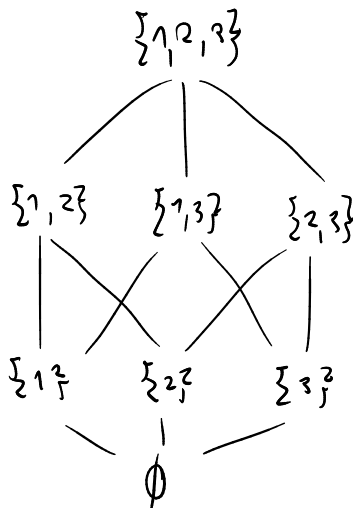
2. $\forall x, y \in X$: buď $R[x] = R[y]$ nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$
 - pro $R[x] \subseteq R[y]$: uvažme $z \in R[x]$, tím pádem zRx (symetrie) a zRy (tranzitivita), proto i xRy a tedy $z \in R[y]$ (pak stačí obrátit...)
 - xRy neplatí – sporem dokážeme, že $R[x] \cap R[y] = \emptyset$... necht existuje $z \in R[x] \cap R[y]$; potom xRz a zRy (tranzitivita), a tedy xRy , což je
3. ekvivalenční třídy určují R jednoznačně
 - zřejmé... xRy právě když $\{x, y\} \subseteq R[x]$

Uspořádání

Definice (uspořádání) Relace R na X je uspořádání $\equiv R$ je **reflexivní**, **antisymetrická** a **tranzitivní**.

- **lineární** $\leq$: $\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$ (všechny x, y jsou porovnatelné)
- **částečné**: ne lineární
- **ostré**: pokud $\leq$ je uspořádání, pak $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$ je ostré uspořádání
- $\geq := \leq^{-1}$ je také uspořádání (to samé platí pro ostré)

Definice (Hasseův diagram) Uvažme uspořádání $(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$. Jeho Hasseův diagram bude vypadat následně:



- spojujeme **bezprostřední předky**, tj.: neexistuje $t \in X$ mezi x, y takové, že $x < t < y$
- x je **minimální** prvek $\equiv \nexists y : y < x$ (analogicky maximální)
 - tzn. *neexistuje menší*
- x je **nejmenší** prvek $\equiv \forall y : x \leq y$ (analogicky největší)
 - tzn. *je menší než všechny ostatní*
 - silnější kritérium než minimální, jelikož musí se všemi být porovnatelný

Definice (lexikografické uspořádání) Necht X je abeceda a $\leq$ uspořádání na X . Pak definujeme lexikografické uspořádání $(X^2, \leq_{LEX})$ následně:

$$(a, b) \leq_{LEX} (a', b') \equiv (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

- nejprve se rozhoduje podle prvního, pak podle druhého
- lze generalizovat pro více (kartézský součin) množin

Dlouhý a široký

Definice ((anti)řetězec) pro $(X, \leq)$ ČUM (částečně uspořádaná množina):

- $A \subseteq X$ je **řetězec** $\forall a, b \in A$ jsou porovnatelné
 - $\omega(X, \leq) :=$ délka nejdelšího řetězce
- $A \subseteq X$ je **antiřetězec** $\equiv$ žádné 2 prvky nejsou porovnatelné (nezávislá množina)

– $\alpha(X, \leq) :=$ délka nejdelšího antiřetězce

Věta (o dlouhém a širokém) pro $(X, \leq)$ konečnou ČUM: $|X| \leq \alpha\omega$

Důkaz:

- $M_1 := \{a \in X \mid a \text{ je minimální v } \leq\}$
- $X_1 := X \setminus M_1$
- pokračujeme a vyjde nám, že $\forall i : |M_i| \leq \alpha$ (všechny totiž musí být nezávislé); rovněž $\exists a_k \in M_k, a_{k-1} \in M_{k-1} \dots$ řetězec $\implies k \leq \omega$
- kombinací dojdeme k nerovnosti $|X| = \sum_{i=1}^k |M_i| \leq \alpha\omega$

Věta (Erdős-Szekeres) nechť $x_1, \dots, x_{n^2+1}$ jsou navzájem různé. Pak existuje buď rostoucí nebo nerostoucí posloupnost délky alespoň $n + 1$.

Důkaz: Na $\{1, \dots, n^2 + 1\}$ definujeme uspořádání $i < j \iff i < j \wedge x_i < x_j$. Rostoucí odpovídají řetězcům, nerostoucí antiřetězcům.

Počítání funkcí

Věta: je-li A a -prvkové a B b -prvkové, pak počet $f : A \mapsto B = b^a$

Důkaz: každý prvek z A můžeme (z definice dokonce musíme) poslat do libovolného prvku z B .

Věta: $|2^X| = 2^{|X|}$

Důkaz: pro $Y \subseteq X$ zavedeme *charakteristickou funkci* $C_Y : X \mapsto \{0, 1\}$, kde

$$C_Y(x) \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

Každá C_Y jasně určuje unikátní podmnožinu, tím pádem vlastně počítáme funkce z n -prvkové do 2-prvkové množiny, kterých je 2^n (viz předešlá věta).

Věta: je-li A a -prvkové a B b -prvkové, pak počet $f : A \mapsto B$ prostých je

$$\prod_{i=0}^{a-1} (b - i) = b^a$$

Důkaz: Důkaz: 1. prvek z a má b možností, druhý $b - 1$, ...

Počítání dvojic: $f : \{1, 2\} \mapsto X \equiv X^2$

- prvky jsou dvojice $(f(1), f(2))$
- $\{1, \dots, k\}$ – uspořádání k -tice
- $\mathbb{N} \mapsto X$ – nekonečné posloupnosti prvků z X

Počet k -tic různých prvků z X ... $f : \{1, \dots, k\} \mapsto X$ je

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

- $n = |X|$ (stejně jako počítání prostých funkcí)

Věta: Počet bijekcí mezi X a X (permutací) $= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 := n!$ (faktoriál)

Definice (pevný bod) permutace p je prvek $x : p(x) = x$ (zobrazí se sám na sebe).

Kombinatorika

- pár definic na rozjezd:

$$\binom{X}{k} := \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Věta: $\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$

Důkaz: budeme počítat dvěma způsoby:

- # (počet) uspořádaných k -tic různých prvků z X je stejný jako:
 - # prostých funkcí z $\{1, \dots, k\} \mapsto X$, kterých je $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
 - # k -prvkových množin $\cdot k!$ (zpermutováním)... $\left| \binom{X}{k} \right| \cdot k!$

Vlastnosti kombinačních čísel

- počet prázdných podmnožin = 1 = počet „plných“ podmnožin: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
- počet 1-prvkových podmnožin = n = počet podmnožin, kde 1 prvek chybí: $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$
- generalizace předchozích dvou vzorečků... počítání doplňků: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- počet podmnožin dané množiny: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
 - vlastně n -bitové číslo – patří/nepatří

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- k -prvkové množiny obsahující/neobsahující nějaký fixní prvek... pokud ho neobsahují, tak máme k míst na ostatní prvky; jinak máme $k-1$ míst (prvek jedno místo jinak zabírá)

Binomická věta

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Důkaz:

- jedná se o *součty součinnů*, které si ze závorek vybírají a nebo b
 - $a^{n-k} b^k$ – celkově jich musí být n
 - $\binom{n}{k}$ – kolika způsoby si lze z n závorek vybrat k znaků

Poznámka:

- $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ – součet řady Pascalova trojúhelníka
- $(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ – počet podmnožin sudé velikosti je roven počtu podmnožin velikosti liché

Odhady pro faktoriál

- triviální: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$
- rozumný: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
- wtf: $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Lemma (a/g nerovnost) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y \geq 0$

Důkaz:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq ab \\ \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy}\end{aligned}$$

Důkaz (rozumného)

- $n! = \sqrt{(n!)^2} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \sqrt{1 \cdot n} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-1)} \cdot \dots \cdot \sqrt{n \cdot 1}$
 - horní: $\sqrt{i(n-i+1)} \leq^{\text{AG}} \frac{i+n-i+1}{2} \implies n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (je jich n)
 - dolní: $\sqrt{i(n-i+1)} \geq \sqrt{n} \implies n! \geq \sqrt{n}^n$ (vevnitř je vždy alespoň n)

Důkaz (wtf) Indukce:

- $n = 1 \dots e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} \leq 1$
- $n-1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned}n! &= n(n-1)! \leq^{\text{IP}} en(n-1) \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ &= en \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n (n-1) \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ &= en \left(\frac{n}{e}\right)^n \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\leq 1} e\end{aligned}$$

Důkaz, toho proč ten výraz ≤ 1 :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n e \leq \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n e = e^{-1}e = 1 \quad 1+x \leq e^x$$

- pozn.: $a \leq b \implies a = bc$ pro $c \leq 1$, proto to vlastně děláme

Princip inkluze/exkluze

Věta (inkluze a exkluze) Necht $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom:

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Také lze zapsat jako

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Důkaz (počítací) kolikrát se prvek x nachází nalevo a napravo:

- nalevo: 1 (ve sjednocení je jednou právě)
- napravo:
 - předpokládejme, že se vyskytne v j množinách – vyskytuje se tedy v každé k -tici z těchto j množin ($k \leq j$)
 - existuje $\binom{j}{k}$ k -prvkových podmnožin j -prvkové množiny (a ve vzorci se znaménka střídají), lze počet výskytů vyjádřit následovně:

$$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + (-1)^{j-1} \binom{j}{j} = 1$$

Grafy

Definice (graf) graf je *uspořádaná dvojice* množin (V, E) , kde V je *konečná, neprázdná* množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

- $\{u, v\} \in E \dots$ mezi u, v vede hrana (jsou sousední)
- $v \in e$ pro $e \in E \dots$ vrchol leží v/na hraně

Odrůdy

- **úplný** $K_n \equiv ([n], \binom{V}{2})$
 - opak je **diskrétní**
- **úplný bipartitní** $K_{m,n}$:
 - $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ (rozdělíme na 2 části)
 - $E(K_{m,n}) = \{\{a_i, b_j\} \mid i \in [m], j \in [n]\}$
 - bipartitní – $E \subseteq$ úplného bipartitního
- **cesta** $P_n \equiv ([n], \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i < n\})$
- **cyklus** $C_n \equiv ([n], \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i \leq n\})$

Definice (izomorfismus) grafy G a H jsou **izomorfní** ($G \cong H$) $\equiv f : V(G) \mapsto V(H)$ bijekce t. ž. $\forall u, v \in V(G)$ platí: $\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$

- vlastně to je takové přejmenování vrcholů

Grafové odhady

Nechť $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

- počet *všech* grafů na V je $2^{\binom{n}{2}}$ (všechny možné dvojice; buďto tam jsou nebo nejsou)
- počet *neizomorfních* grafů: počet všech grafů / počet tříd izomorfismu (ekvivalence)
 - izomorfismů je nejvýše $n!$ (uvažujeme všechna přejmenování)
 - celkem tedy $\geq 2^{\binom{n}{2}}/n!$
 - není to tak špatný odhad:

$$\begin{aligned} \log \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} &\geq \binom{n}{2} - n \log n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - n \log n \\ &= \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2 \cdot \log 2n}{n} \right) \end{aligned}$$

Vlastnosti grafu

- **stupeň vrcholu** v grafu G je $\deg_G(v) = \#\{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}$
 - tzn. kolik hran vede do vrcholu
 - k -regulární graf: stupeň všech vrcholů je k
- **skóre grafu** je uspořádaná n -tice stupňů všech vrcholů
 - typicky $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$
 - $0 \leq d_i < n-1$

Tvrzení:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Důkaz: nechť K je $\{(v, e) \mid e \in E(G) \wedge v \in e\}$; pak

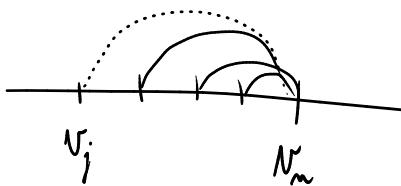
$$|K| = 2 \cdot |E(G)| = \sum_v \deg(v)$$

- první rovnost platí, jelikož každá hrana přispěje 2x
- druhá rovnost platí, jelikož každý vrchol přispěje všemi hranami, které do něj jdou (tj. svým stupněm)
- vyplývá z toho *princip sudosti*: počet vrcholů lichého stupně je sudý (jinak by se to nesečetlo na sudé číslo)

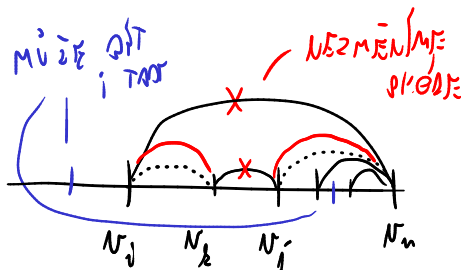
Věta (testování skóre) nechť $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ posloupnost přirozených čísel. Pak $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1}$ vznikne smazáním posledního prvku a odečtením 1 od d_n předchozích. Pak $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ je skórem grafu, když $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1}$ je skórem grafu.

Důkaz:

- $\Rightarrow$: víme, že $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1}$ je skórem grafu, stačí tedy přilepit vrchol a propojit ho patřičnými hranami k existujícímu grafu:
 - $V(G) = \{v'_1, \dots, v'_{n-1}, v_n\}$
 - $E(G) = E(G') \cup \{\{v'_i, v_n\} \mid n - d_n \leq i \leq n - 1\}$
 - pozor! opačně nefunguje, jelikož nemáme jistotu, že odebíráme od těch zprava
- $\Leftarrow$:
 - nechť $\mathcal{G} := \{G \text{ na } \{v_1, \dots, v_n\} \mid \forall i : \deg_G(v_i) = d_i\}$
 - * = všechny možné grafy s tímhle skórem
 - lemma: $\exists G \in \mathcal{G} : \forall j, n - d_n \leq j < n : \{v_j, v_n\} \in E(G)$
 - * tedy existuje graf, od kterého můžeme odtrhnout poslední vrchol (ten s největším stupněm) a dostaneme správné skóre
 - nechť $j(G) := \max \{j \mid \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$ (první díra zprava)



- nechť $G \in \mathcal{G}$ má minimální $j(G)$... pak $j < n - d_n$
 - důkaz sporem: kdyby $j \geq n - d_n$, pak $\exists i$ a $\exists k : \{v_j, v_k\} \in E(G) \wedge \{v_i, v_k\} \notin E(G)$
 - * pro $d_i < d_j$ – z v_j jich vede více než s d_i (takže do nějaké do které d_j vede d_i nevede)
 - * $d_i = d_j$ je taky ok... jedna z v_i vede do v_n



- škrtnutím vyrobíme graf, který má menší j ...

Definice (podgraf) Graf H je *podgrafem* grafu G ($H \subseteq G \equiv V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$).

- vznik tak, že z grafu odebíráme hrany/vrcholy

Definice (indukovaný podgraf) Graf H je *indukovaným podgrafem* grafu G ($H \subseteq G \equiv V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$).

- vznik tak, že z grafu odebíráme pouze vrcholy (a s nimi spojené hrany)

Definice (cesta) v grafu délky k je (2 pohledy):

1. $H \subseteq G$ t. ž. $H \cong P_k$

2. $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ t. ž.:
 - $\forall i : v_i \in V(G) +$ všechny v_i jsou různé vrcholy
 - $\forall j : e_j \in E(G) \wedge e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$
- obdobně lze definovat kružnici, jen $v_e = v_k$

Definice (sled) (procházka/walk) v grafu G je cesta, ve které se mohou vrcholy i hrany opakovat.

Tvrzení: pokud existuje sled z x do y , pak existuje i cesta.

- zvolíme nejkratší ze všech sledů... to je cesta; kdyby ne, pak $\exists$ vrchol, který se tam vyskytuje 2x (tím pádem jde sled zkrátit)

Definice (souvvislost) Graf G je *souvvislý* $\equiv \forall u, v \in V(G) \exists$ cesta v G z u do v

- relace dosažitelnosti: $\sim$ na $V(G)$: $u \sim v \equiv \exists$ cesta z u do v
 - je to ekvivalence: je *reflexivní* (cesta z u do u velikosti 0), *symetrická* (graf je neorientovaný) i *transitivní* (jen pozor na to, že to po slepení může být sled – je potřeba to ošetřit)

V souvislém grafu G je vzdálenost vrcholu u, v *minimum* z delek cest z u do v (značíme $\rho(u, v)$).

- jedná se o *metriku*, jelikož splňuje následující:
 1. $\forall u, v : \rho(u, v) \geq 0$
 2. $\forall u, v : \rho(u, v) = 0 \iff u = v$
 3. $\forall u, v : \rho(u, v) = \rho(v, u)$
 4. $\forall u, v, w : \rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ (trojúhelníková nerovnost)

Grafové operace

- *přidání* hrany/vrcholu: $G + v, G + h$
- *smazání* hrany/vrcholu:
 - $G - e := G(V, E \setminus \{e\})$
 - $G - v := G(V \setminus v, E \setminus \{e \in E \mid v \notin e\})$
- *dělení* hrany $G \% e := (V \cup \{z\}, (E \setminus \{x, y\}) \cup (\{x, z\}, \{z, y\}))$
- kontrakce hrany $G/e := ((V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}, \{e \in E \mid e \cap \{x, y\} \neq \emptyset\} \cup \{(e \setminus \{x, y\}) \cup \{z\} \mid e \in E \wedge |e \cup \{x, y\}| = 1\})$

Stromy

Definice (strom les, list)

- strom je *souvvislý acyklický graf*
- les je *acyklický graf* (soubor stromů)
- list – vrchol stromu s $\deg(v) = 1$

Tvrzení: Strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 *listy* (vrcholy, do kterých vede 1 hrana).

Důkaz: uvažme nejdelší cestu. Její krajní vrcholy jsou listy, jelikož:

- pokud z nich vede cesta někam zpět do sebe, tak graf není strom
- pokud z nich vede cesta někam, kde jsme ještě nebyli, tak není nejdelší

Tvrzení: nechť v je list grafu G . Pak G je strom $\iff G - v$ je strom.

Důkaz:

- $\Rightarrow$... $G - v$ je acyklický (cyklus jsme odstraněním nevytvořili) a souvislý (vedla přes něj pouze 1 cesta, a to ta do něj)
- $\Leftarrow$... po přilepení je také souvislý ($\forall x \in G - v \exists$ cesta z x do v) a acyklický (přilepený vrchol má stupeň 1, nemůže tedy tvořit cyklus)

Věta (charakteristika stromu) následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. **standardní:** G je souvislý a acyklický
2. **jednoznačná souvislost:** mezi každými vrcholem x, y vede *právě 1 cesta*
3. **minimální souvislost:** G je souvislý a $\forall e \in E(G) : G - e$ souvislý není

4. **maximální acykličnost:** G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) : G + e$ obsahuje cyklus
 5. **Eulerova formule:** G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Důkaz: $1 \implies 5$: indukcí:

- $n = 1$ sedí (0 hran, 1 vrchol, je to strom)
- $n \rightarrow n + 1$... nechť G má $n + 1$ vrcholů...
 - G má list (lemma), jehož odtržením máme stále strom (G')... poštvením IP máme důkaz

$1 \implies 2$: indukcí:

- $n = 1$ platí
- po přilepení:
 - zachová všechny staré cesty
 - $\forall x \in V(G - v) \exists!$ cesta $x \sim s$ a $\forall$ cesty $x \sim v$ jsou tvaru $x \sim s \sim v$ (jsou jednoznačné)

$1 \implies 3$: indukcí:

- pro $n = 2$ platí (odebráním hrany se vrcholy rozpadnou)
- indukce $n + 1 \rightarrow n$:
 - IP: graf n se rozpadne
 - po odebrání $n + 1$ hrany se graf také rozpadne

$1 \implies 4$:

- acykličnost sedí
- přidáním hrany vytvoříme cyklus, jelikož tam již existuje cesta a tohle vytvoří druhou
 - pozor! neplést si s implikací $4 \implies 1$; tohle *není spor*

$2 \implies 1$:

- je tím pádem souvislý
- kdyby existovala kružnice, pak existují 2 různé cesty

$3 \implies 1$:

- souvislost sedí
- kdyby existoval cyklus, tak se odstraněním nestane nesouvislý

$4 \implies 1$:

- acykličnost sedí
- kdyby nebyl souvislý, tak přidání nevytvoří cyklus

$5 \implies 1$ – indukcí podle počtu vrcholů:

- existuje vrchol, který je list
- koukneme na skóre: $\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E(G)| = 2n - 2$
 - $d_i \geq 1$ (souvislost) a alespoň 1 je 1 (kdyby ne, tak $d_i > 1$, což je v součtu alespoň $2n$) a máme tedy list; jeho odtržením máme podle IP (graf má po odtržení stupeň $2(n - 1) - 2$) strom, a po přilepení je to opět strom

Kostra, sled, tahy

Definice (kostra) grafu G je graf $H \subseteq G : V(H) = V(G) \wedge H$ je strom

- nesouvislý graf nemá kostru

Definice (tah) je sled, ve kterém se neopakují hrany.

- *uzavřený/otevřený* – koncové vrcholy tahu jsou/nejsou stejné
- *Eulerovský* – obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu

Věta: v grafu G existuje *uzavřený Eulerovský tah* $\iff$ je souvislý a $\forall v \in G : \deg(v)$ je sudý

- $\implies$: je souvislý (všude se lze dostat tahem) i sudý (všechny hrany vedoucí do daného vrcholu lze spárovat, protože do něj vcházíme a vycházíme)
- $\Leftarrow$: uvažíme *nejdelší možný tah*:

- je *uzavřený*, jelikož kdyby nebyl, pak je počáteční i koncový vrchol tahu lichý, ale sudost znamená, že jsme nějaké hrany nevyužili... tah tedy není maximální
- je *Eulerovský*, protože:
 - * obsahuje všechny vrcholy; kdyby ne, tak jej lze připojit a vytvořit tak větší tah
 - * obsahuje všechny hrany; víme, že obsahuje všechny vrcholy, proto je hrana mezi již nakreslenými vrcholy... tu ale lze také přidat
- POZOR: je potřeba si dávat pozor na pořadí, ve kterém tuhle implikaci dokazují – záleží na něm

Rozšiřování grafů

Definice (multigraf) je uspořádaná trojice (V, E, K) , kde:

- V jsou vrcholy ($V \neq \emptyset$)
- E jsou hrany
- K je zobrazení $E \mapsto \binom{V}{2} \cup V$ (sjednocení kvůli existenci smyček)

Definice (orientovaný graf) je (V, E) , kde $E \subseteq V^2 \setminus \Delta_V$ (lze u multigrafu rozšířit obdobně)

- hodí se rozlišovat vstupní ($\deg^{\text{in}}$) a výstupní ($\deg^{\text{out}}$) stupně

Definice (podkladový graf)

- u orientovaného zapomeneme orientaci
- u multigrafu zrušíme opakování hran

Definice (souvislost)

- *slabá* – dosažitelnost v podkladovém
- *silná* – $\forall u, v \in V \exists$ cesta z do v

Věta: pro *vyvážený* orientovaný multigraf G je ekvivalentní:

1. G je slabě souvislý
2. G má uzavřený Eulerovský tah
3. G je silně souvislý

Důkaz:

- $3 \implies 1$ již víme (podkladový je obecnější)
- $2 \implies 3$ tahem se dostaneme kdekoliv potřebujeme
- $1 \implies 2$ stejné jako důkaz u neorientovaného

Rovinné nakreslení grafu

Definice (bod) je prvek $\mathbb{R}^2$

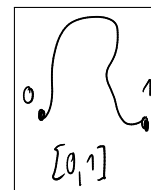
Definice (křivka) je prostá a spojitá množina bodů

Definice (jednoduchá křivka = oblouk) je $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ spojitá a prostá.

- jednoduchá **uzavřená** křivka = kružnice: prostá až na $f(0) = f(1)$

Definice (rovinné nakreslení) multigrafu (V, E, K) je $\nu : V \mapsto \mathbb{R}^2$ a $\{C_e \mid e \in E\}$ množina oblouků/kružnic t. z.:

1. $(\forall e \in E) K(e) = \{u, v\} \implies C_e$ je oblouk s konci $\{\nu(u), \nu(v)\}$
 - za každou hranu existuje oblouk
2. $(\forall e \in E) K(e) = u \implies C_e$ je kružnice obsahující $\nu(u)$
 - smyčky
3. $(\forall e, f \text{ různé } \in E) \implies C_e \cap C_f = \nu[K(e) \cap K(f)]$
 - průniky jsou jen vrcholy
4. $(\forall v \in V, \forall e \in E) \nu(v) \in C_e \implies v \in K(e)$
 - protíná-li kružnice vrchol, pak je vrchol na té hraně



Definice (rovinnost) Graf je *rovinný*, pokud existuje nějaké jeho rovinné nakreslení.

- cesta je rovinná
- kružnice je rovinná
- strom je rovinný (přidáváním listů – vždy je „zoomovat“ a pokládat tam listy)

Definice (topologický graf) graf nakreslený do roviny.

Věta (Jordanová věta) Necht T je topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$. Pak $\mathbb{R}^2 \setminus T$ má právě 2 komponenty obloukové souvislosti: 1 omezenou, 1 neomezenou a T je jejich společnou hranicí.

- těžké dokázat

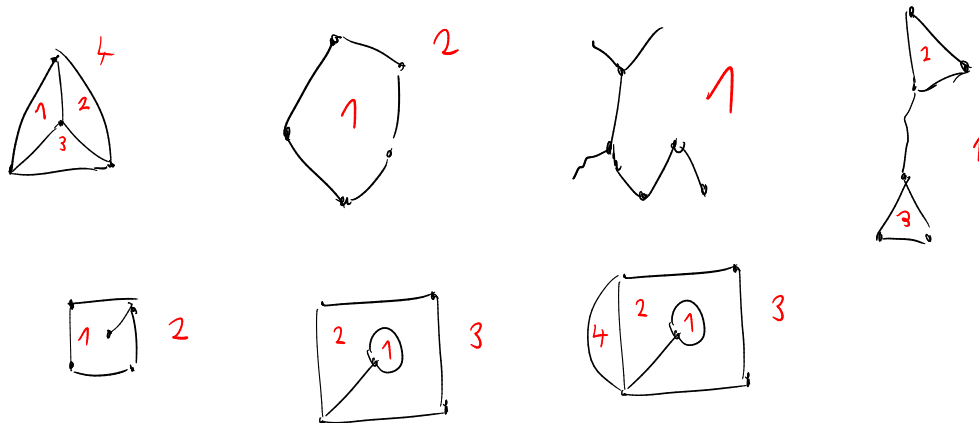
Věta: K_5 není rovinná.

Důkaz: Po rovinném nakreslení K_4 je zřejmé, že z každé stěny jsou dosažitelné právě 3 vrcholy – K_5 proto rovinná být nemůže.

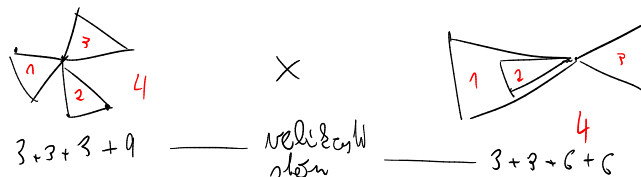
Definice (křížící číslo) je min. počet křížení.

Definice (stěny nakreslení) jsou komponenty obloukové souvislosti:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{ \nu(v) \mid v \in V \} \cup \bigcup_{e \in E} C(e) \right)$$



Poznámka: nechová se jako izomorfismus!



Věta: hranice každé stěny souvislého grafu je nakreslením uzavřeného sledu, který každou hranu obsahuje nejvýše dvakrát.

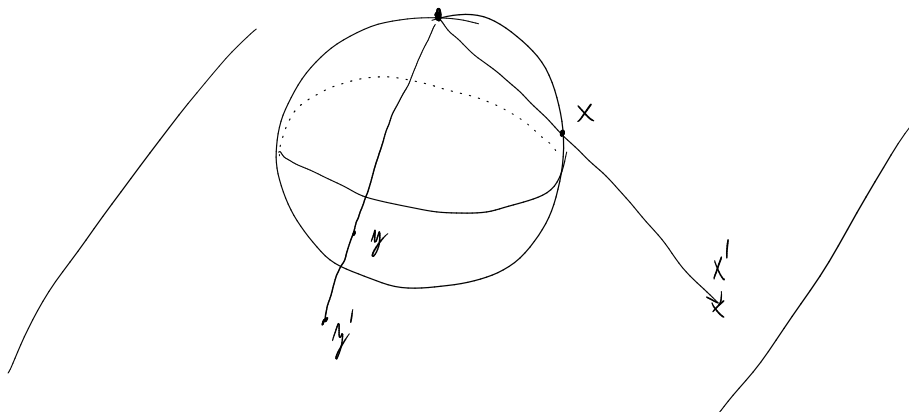
Důkaz: indukce podle počtu hran (počet vrcholů je pevný):

1. pro strom: počet hran = počet vrcholů – 1; nakreslení má právě 1 stěnu; sled je DFS
2. pro $|E| > |V| - 1$: obsahuje kružnici... necht $e = \{u, v\}$ leží na kružnici
 - rozdělíme ji na 2 sledy

Věta: G má nakreslení na sféru $\iff G$ je rovinný.

Důkaz: uděláme *stereografickou projekci*... jedná se o bijekci

- je potřeba si dát pozor a natočit ji tak, ať se netrefíme někam do grafu



Věta (Kuratowského) G není rovinný $\iff \exists H \cong G$ t. ž.: $H \cong$ nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$

Věta (Eulerova formule) nechť G je souvislý graf nakreslený do roviny. Pak $v + f = e + 2$

Důkaz: fixujeme v , indukce podle e :

- graf je strom: $e = v - 1$; $f = 1 \dots v + f = e + 2$
- IK: uvažme h na kružnici a podívejme se na $G - h$
 - $v' = v$
 - $e' = e - 1$ (odebrání hrany)
 - $f' = f - 1$ (spojení dvou stěn)

Definice: G je maximálně rovinný $\iff G$ je rovinný a $G + e$ není rovinný $\forall e \notin E(G)$.

Věta: pro maximálně rovinný graf G s $v \geq 3$ jsou všechny jeho stěny trojúhelníky.

Definice:

1. každý maximální graf je souvislý (pokud ne, tak lze nesouvislé komponenty spojit)
2. kdyby existovala stěna s hranicí C_n pro $n > 3$, pak můžeme v rámci stěny přidat hranu
3. strana, jejíž hranice není kružnice neexistuje (mohli bychom přidat stěnu)

Věta: Nechť G je maximálně rovinný s $v \geq 3$ vrcholy. Pak $e = \frac{3}{2}f$.

Důkaz: každá stěna vytváří tři hrany, ze kterých každá patří právě do dvou stěn.

Věta (počet hran rovinného grafu) pro počet hran rovinného grafu platí

$$e \leq 3v - 6$$

Pro maximálně rovinný platí rovnost.

Důkaz: Dosazení pozorování výše do Eulerova vzorce (není-li graf maximálně rovinný, pak $e \leq \frac{3}{2}f$, jelikož některé stěny budou mít větší počet hran).

Věta: v každém rovinném grafu existuje vrchol t. ž. $\deg(v) \leq 5$

Důkaz:

- pro počet vrcholů ≤ 2 triviální
- pro ostatní: $e \leq 3v - 6 \implies$ průměrný stupeň < 6
 - $2e \leq 6v - 12 \implies 2e < 6v \implies \frac{2e}{v} < 6$ ($2e$ je součet všech stupňů)

Věta: Nechť G je maximálně rovinný bez trojúhelníků. Pak $e \leq 2v - 4$.

Důkaz: stejná úvaha jako výše, jen každá stěna vytváří 4 hrany.

Barvení

Definice (obarvení) grafu k barvami je funkce $C : V(G) \mapsto \{1, \dots, k\}$ t. ž. $\forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \implies C(u) \neq C(v)$

Definice (barevnost/chromatické číslo) $\chi(G)$ je nejmenší k t. ž. existuje obarvení grafu k barvami

- $\chi(P_n) = 2$ (pro $n > 0$)
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ sudé} \\ 3 & n \text{ liché} \end{cases}$
- $\chi(K_n) = n$
- $H \subseteq G \implies \chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(G) = 1 \iff G$ nemá hrany
- $\chi(G) = 2 \iff G$ je bipartitní

Věta: pokud G nemá lichou kružnici, pak $\chi(G) \leq 2$.

Důkaz: graf je souvislý $\implies$ má kostru T . Necht C je 2-obarvení T . Pokud by C nebylo obarvením G , pak $\exists$ cesta sudé délky z vrcholu u do v , jejíž propojením dostáváme lichý cyklus.

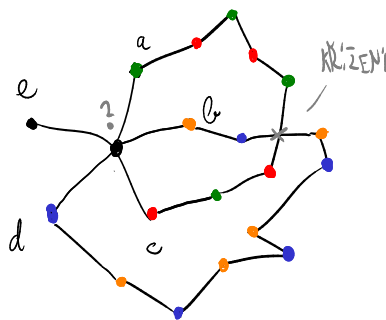
Tvrzení: Je-li T strom s alespoň 2 vrcholy, pak $\chi(T) = 2$

Důkaz: zakořeníme a barvíme po vrstvách.

Věta: každý rovinný graf je 5-obarvitelný.

Důkaz:

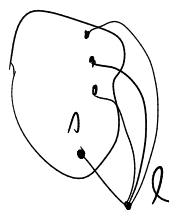
- pro $|V| \leq 5$ lze triviálně (prostě přiřadíme všechny barvy)
- indukci podle počtu vrcholů: uvažme $v \in V(G)$ s minimálním stupněm – ten odtrhneme, graf podle IP obarvíme a rozebereme případy:
 - „každý podgraf d -degenerovaného grafu obsahuje vrchol stupně menšího než d “
 - $\deg(v) > 5$ nenastane (vztah $e = 3v - 6$)
 - pro $\deg(v) = 5$: pokud jsou nějaké barvy stejné, tak obarvíme zbylou; jinak uvažme zeleno-červený podgraf vycházející z vrcholu a ... pro ten mohou nastat dva případy:
 1. pokud c nepatří do podgrafu, tak prohodíme *všechny barvy v podgrafu* a jedné se tím na problematickém vrcholu zbavíme
 2. pokud patří, tak uděláme totéž s vrcholy b a d ; oba případy najednou nastat nemohou, jelikož by se křížily v hraně (nelze – poruší rovinnost) nebo ve vrcholu (nelze, ten už má barvu)



Degenerovanost, klikovost, dualita

Definice: graf G je d -degenerovaný $\equiv \forall H \subseteq G \exists v \in V(H) : \deg_H(v) \leq d$

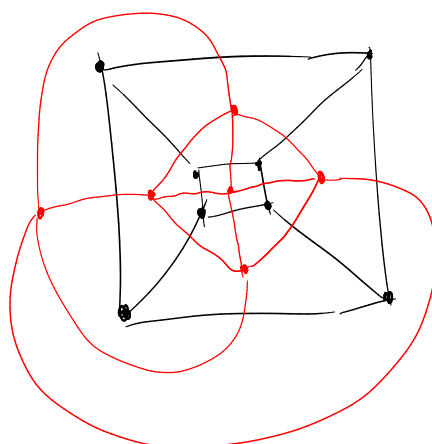
- pozor! neříká to, že $\forall v \in V(G) : \deg(v) \leq 5$, jelikož podgrafy trhají vrcholy a hrany
- každý strom je 1-degenerovaný
- rovinné grafy jsou 5-degenerované (viz. důkaz kousek zpět – stupně rovinných grafů)
- graf s max. stupněm Δ je Δ -degenerovaný
- obecně platí $\chi(G) \leq d + 1$
 - důkaz indukci: odstranění má obarvení a ke přidání zpět je potřeba alespoň 1 volná barva



$$\deg \leq d$$

Definice: Pro G nakreslený do roviny definujeme G^* duální graf:

- ze stěny je vrchol (a obráceně)
- z hrany je hrana (bijekce)
- podle Eulerovy formule: v a f se prohazuje, e zůstává



Definice (klikovost) $\omega(G)$ je maximální k t. ž. G obsahuje K_k .

- $\chi(G) \geq \omega(G)$ (na K_k je potřeba k barev...)

Pravděpodobnost

Definice (diskrétní pravděpodobnostní prostor) je (Ω, P) .

- Ω je nejvýše spočetná množina *elementárních jevů* (hod mincí/kostkou/...)
- P je funkce $\Omega \mapsto [0, 1]$ („pravděpodobnost“) t. ž. $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
- klasický... $\forall x, y$ el. jevy platí $P(x) = P(y)$

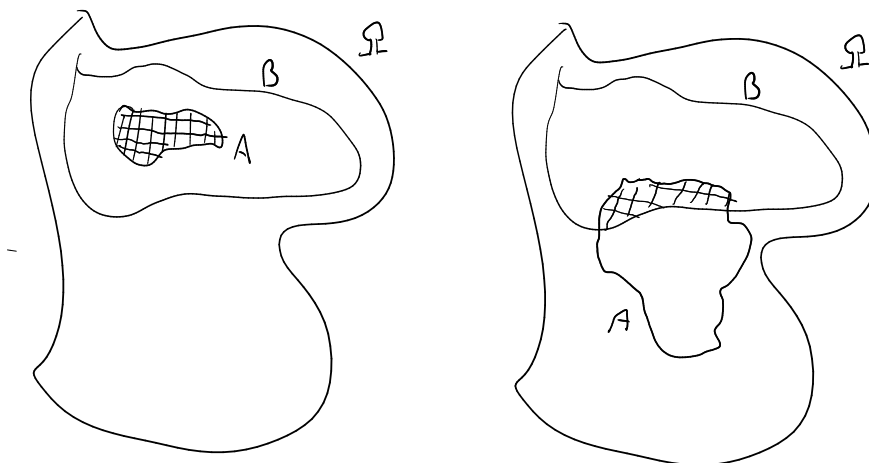
Definice (jev) X je množina elementárních jevů.

- $P[X] = \sum_{\omega \in X} P(\omega)$
- $P[\Omega] = 1$
- $P[\emptyset] = 0$

Podmíněná pravděpodobnost

$$P[A | B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- podmínkou vytváříme novou množinu elementárních jevů, která ale není normalizovaná (to zajišťuje dělení)
- vlastně to po přepsání na $P[A | B] \cdot P[B] = P[A \cap B]$ znamená: pravděpodobnost B krát pravděpodobnost, že v rámci B nastane A je šance jejich průniku ($P[A \cap B]$):



Věta (o úplné pravděpodobnosti) nechť $B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω a $\forall i : P[B_i] \neq 0$

$$\forall A : P[A] = \sum_i \underbrace{P[A | B_i] \cdot P[B_i]}_{P[A \cap B_i]}$$

Věta (Bayesova) nechť $B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω t. ž. $\forall i : P[B_i] \neq 0$ a A je jev. Potom $\forall i$:

$$P[B_i | A] = \frac{P[A | B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_j P[A | B_j] \cdot P[B_j]} = \frac{P[A | B_i] \cdot P[B_i]}{P[A]}$$

Důkaz (trochu pseudo)

$$P[B_i | A] \cdot P[A] = P[A \cap B_i] = P[B_i \cap A] = P[A | B_i] \cdot P[B_i]$$

Definice (nezávislé jevy) jevy A, B jsou nezávislé (B neovlivňuje A), pokud (ekvivalentní výroky):

1. $P[A | B] = P[A]$
2. $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

Obecněji: jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou po k nezávislé

$$\iff \forall I \in \binom{[n]}{k} : P\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} P[A_i]$$

- jevy jsou nezávislé $\iff$ jsou po k nezávislé $\forall k$

Definice (součin pravděpodobnostních prostorů) $P(\Omega_1, P_1)$ a (Ω_2, P_2) je pravděpodobnostní prostor (Ω, P) t. ž.:

- $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$
- $P((x_1, x_2)) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2)$
- pozn.: stále se pravděpodobnost sečte na jedničku: $\sum_{x_1, x_2} P_1(x_1) P_2(x_2) = 1 \cdot 1 = 1$

Definice (náhodná veličina) je $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (ale klidně i do jiné množiny... je to dost jedno)

- $P[f \geq 7] = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq 7\}$
- *střední hodnota* náhodné veličiny X je $\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$
- linearita střední hodnoty: $\forall X, Y$ náhodné veličiny platí:
 - $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
 - $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
 - důkazy jsou přímočaré (dosazení do sumy)

Definice (indikátor) jevu $J_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nenastal} \\ 1 & \text{nastal} \end{cases}$

- $J = \sum_i J_i$

Pravděpodobnostní odhady

Věta (Markovova nerovnost) nechť X je náhodná *nezáporná* veličina, která má střední hodnotu, a $t \geq 1$; potom platí, že

$$P[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Důkaz: vycházíme ze střední hodnoty; iterujeme přes všechna $a \in R$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x] &= \sum_a P[x = a] \cdot a && // \text{definice} \\ &\geq \sum_{a \geq k} P[x = a] \cdot a && // \text{iterujeme přes více hodnot} \\ &\geq \sum_{a \geq k} P[x = a] \cdot k && // k \geq a \\ &= k \cdot \sum_{a \geq k} P[x = a] \\ &= k \cdot P[x \geq k]\end{aligned}$$

- dosazením $k := t \cdot \mathbb{E}[x]$ dostáváme Markovovu nerovnost

Definice (variance = rozptyl) $\text{var } X := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

- $\sqrt{\text{var } X}$ je *střední hodnota odchylky*

Věta (Čebyševova nerovnost) nechť X je náhodná veličina, která má střední hodnotu, a $t \geq 1$; potom platí, že

$$P[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sqrt{\text{var } X}] \leq \frac{1}{t^2}$$

Důkaz: dosazení do Markovovy nerovnosti (jen pozor na odmocňování nerovnosti – abs. hodnota).